Die Verteilung der quadratischen Reste und Nicht-Reste mod p

INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

Vorgelegt von
Dieter Wolke
aus Dittersbach

Marburg/Lahn 1968

1969

E. Symon · Foto-Druck · 355 Marburg/L. · Friedrichsstr. 3

Die Verteilung der quadratischen Reste und Nicht-Reste mod p

INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

Vorgelegt von
Dieter Wolke
aus Dittersbach

Marburg/Lahn 1968

Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Philipps-Universität Marburg/Lahn als

Dissertation angenommen am
Tag der mündlichen Prüfung am 5.2.1969
Berichterstatter: Prof. Dr. H.E.Richert
Mitberichterstatter: Prof. Dr. A.Peyerimhoff

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 2

Bezeichnungen 6

1.Teil. Hilfssätze über die Funktionen $\Psi(x,y)$ und $\Phi(x,y)$ 7

2.Teil. Abschätzung der Summen $\sum_{p\leq x} \left| \sum_{q\leq y} \left(\frac{q}{p}\right)\right|^l$ 13

3.Teil. Die Anzahl der $q\leq x^{2/3}$, welche quadratischer Rest bzw. Nicht-Rest mod p sind 17

4.Teil. Abschätzung der Summen $\sum_{p\leq x} \left| \sum_{n\leq y} \left(\frac{n}{p}\right)\right|^l$ 27

5.Teil. Beweis des Satzes 42

Schlußbemerkungen 60

Literaturverzeichnis 61

Einleitung

Eine der berühmten Vinogradovschen Vermutungen besagt, daß $h_2(p)$, der kleinste, positive, quadratische Nicht-Rest mod p

$$= O(p^{\varepsilon}) \qquad \text{ist für jedes} \quad \varepsilon>0.$$

Bis heute weiß man nur, daß

$$h_2(p) = O(p^{\alpha}) \qquad \text{für jedes} \quad \alpha > \frac{1}{4}\, e^{-1/2}$$

richtig ist (s. Burgess [7]).

Linnik [16] zeigte mittels der von ihm entwickelten Methode des "Großen Siebes", daß es nur sehr wenige Primzahlen geben kann, auf die die Vinogradovsche Vermutung nicht zutrifft.

Ebenfalls mit dem "Großen Sieb" bewies Erdös [10] folgenden Satz: Bezeichne p ungerade Primzahlen und sei q_k die k-te Primzahl. Dann gilt für $x \to \infty$

$$(1) \qquad \sum_{p\le x} h_2(p) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} q_k\, 2^{-k} \right\} \Pi(x)\, (1+o(1)) .$$

$h_2(p)$ ist also im Mittel beschränkt.

In der vorliegenden Arbeit soll (1) in verschiedener Hinsicht verallgemeinert werden.

Für eine Primzahl $p>2$ und eine natürliche Zahl k bezeichne $n_k(p)$ (bzw. $r_k(p)$) die k-te Primzahl $q\ge 2$ mit $(\frac{q}{p})=-1$ (bzw. $(\frac{q}{p})=+1$) und $N_k(p)$ (bzw. $R_k(p)$) die k-te natürliche Zahl $n\ge 1$ mit $(\frac{n}{p})=-1$ (bzw. $(\frac{n}{p})=+1$). Wie üblich ist $(\frac{n}{p})$ das Legendre-Symbol.

Unser Ziel ist der

Satz:

a) Gleichmäßig für

$$k \le \exp\left\{ \frac{1}{16} \frac{\log x \log_3 x}{\log_2 x} \right\} \quad \text{bzw.} \quad k \le (\log x)^A$$

(A>0 , beliebig)

gilt

$$(2) \qquad \sum_{2<p\le x} n_k(p) = \varkappa_k \Pi(x) (1+o(1)) , \quad \text{bzw.}$$

$$(3) \qquad \sum_{2<p\le x} r_k(p) = \varkappa_k \Pi(x) (1+o(1)) \qquad (x \to \infty)$$

mit

$$(4) \qquad \varkappa_k \to q_{2k} \qquad \text{für} \quad k \to \infty .$$

b) Gleichmäßig für alle k gilt

$$(5) \qquad \sum_{2<p\le x} N_k(p) = \mathfrak{N}_k \Pi(x) (1+o(1)) ,$$

$$(6) \qquad \sum_{2<p\le x} R_k(p) = \mathfrak{R}_k \Pi(x) (1+o(1)) \qquad (x \to \infty)$$

mit

$$(7) \qquad \mathfrak{N}_k \to 2k , \quad \mathfrak{R}_k \to 2k \qquad \text{für} \quad k \to \infty .$$

Ausführliche Aussagen über $\varkappa_k$, $\mathfrak{N}_k$, $\mathfrak{R}_k$ und über die Güte der Asymptotik in (2),...,(7) sind in den Lemmata und Bemerkungen des Teiles 5 zu finden.

Wegen der Länge des Beweises geben wir eine kurze Übersicht:

Für alle k, die unterhalb einer beliebig großen, aber festen Schranke A liegen, sind (2),(3),(5) und (6) eine unmittelbare Verallgemeinerung des Satzes von Erdös (Lemma 13 und 14).

Für $k>x^{2/3}$ sind (5) und (6) eine leichte Anwendung der bekannten Abschätzung für Charaktersummen von Pólya-Vinogradov (s. [19]).

In den übrigen k-Bereichen hat man anders zu verfahren (Lemma 11 und 12). Die Grundidee ist, daß für die meisten $p\leq x$ $n_k(p)$ bzw. $N_k(p)$ dicht bei q_{2k} bzw. $2k$ liegt. Oder, anders ausgedrückt, für die meisten $p\leq x$ ist $\left|\sum_{q\leq q_{2k},\ q \text{ prim}} \left(\frac{q}{p}\right)\right|$ klein im Verhältnis zu $2k$, bzw. $\left|\sum_{n\leq 2k} \left(\frac{n}{p}\right)\right|$ klein gegenüber $2k$. Präzise Aussagen dieser Art erhält man aus oberen Abschätzungen von Summen der Gestalt

$$(A)\quad \sum_{p\leq x}\left|\sum_{q\leq y}\left(\frac{q}{p}\right)\right|^l, \qquad (B)\quad \sum_{p\leq x}\left|\sum_{n\leq y}\left(\frac{n}{p}\right)\right|^l$$

(l ganz, ≥ 1). Im Falle $y\leq(\log x)^c$ ($c>0$) gewinnt man diese für (A) aus dem Satz von Brun-Titchmarsh (Lemma 5), für (B) aus dem Satz von Siegel-Walfisz über die Anzahl der Primzahlen in arithmetischen Progressionen (Lemma 9), Im Falle größerer y benutzen wir die Methode des "Großen Siebes". Während (A) keine besonderen Schwierigkeiten aufwirft (Lemma 6), sind bei (B) umfangreichere Rechnungen nötig (Lemma 10a)-c)). Insbesondere ergibt sich, daß - anschaulich gesprochen - die Anzahl derjenigen $p\leq x$, für die $n_k(p)$ bzw. $N_k(p)$ im Verhältnis zu q_{2k} bzw. $2k$ sehr groß wird, äußerst klein ist. So reicht es aus, für

diese "Ausnahmeprimzahlen" $p \le x$ aufgrund der Ungleichung

$$\sum_{n \le y} \left(\frac{n}{p}\right) \ll p^{1/2} \log p$$

$N_k(p)$ nach oben durch $O(x^{2/3})$ abzuschätzen, wenn nur $k \le x^{2/3}$ ist.

Anders ist die Situation bei $n_k(p)$ und $r_k(p)$. Da keine nichttriviale Abschätzung der Summe

$$\sum_{q \le x^{1-\varepsilon}} \left(\frac{q}{p}\right) \quad (p \le x , q \text{ prim} , \varepsilon \ge 0)$$ bekannt ist,

kann man sich vorstellen, daß für große k und gewisse $p \le x$ (wenn auch nur sehr wenige) zum Beispiel $n_k(p)$ einen zu großen Beitrag liefert, etwa gar $x^{1+\delta}$ ($\delta > 0$), welches die Asymptotik in (2) zerstören würde. Im Hinblick auf diese Frage zeigen wir, daß für $p \le x$ und

$$k \le \exp\left\{ \frac{1}{16} \frac{\log x \log_3 x}{\log_2 x} \right\} \quad \text{bzw.} \quad k \le (\log x)^A \quad (A > 0)$$

stets

$$n_k(p) \ll x^{2/3} \quad \text{bzw.} \quad r_k(p) \ll x^{2/3} \quad \text{gilt.}$$

(Lemma 7 und 8).

In den Beweisen zu Lemma 7 und 8 und in einer Bemerkung zu Lemma 10 verwenden wir an wesentlichen Stellen Abschätzungen für die Funktionen

$$\Psi(x,y) = \sum_{\substack{n \le x \\ q \mid n \Rightarrow q \le y}} 1 \quad , \quad \Phi(x,y) = \sum_{\substack{n \le x \\ q \mid n \Rightarrow q \ge y}} 1$$

und Ähnliche. In Lemma 1 und Lemma 2 beweisen wir bezüglich $\Psi(x,y)$ und eine verwandte Funktion einfache Ungleichungen.

Bezeichnungen

x,y,t,z : positive, reelle (genügend große) Zahlen,

a,b : ganze Zahlen,

n,m,l,k,r,ν : natürliche Zahlen,

p : ungerade Primzahlen,

q : Primzahlen ≥ 2,

$A,B,C,c,D,d,\varepsilon,\lambda,\delta,$
α,η,σ : positive, reelle Zahlen,

$\varepsilon(x)$: eine mit wachsendem x gegen Null gehende reelle Funktion

(alle Parameter eventuell mit Indizes) .

$\log_2 x = \log\log x$, $\log_3 x = \log(\log_2 x)$,

$\sum^{*}_{\chi \bmod p}$: Summation über alle primitiven Charaktere modulo p,

$p(n)$: größter Primteiler von n, $p(1)=1$,

$\nu(n)$: Anzahl der verschiedenen Primteiler von n,

$\tau(n) = \sum_{k|n} 1$.

O-, o- und $<<$- Symbol werden im üblichen Sinne benutzt, $o(\ )$ nur bei Annäherung gegen $+\infty$. Wenn nicht anders erwähnt, sollen die O — bzw. $<<$ — Konstanten absolut sein. C und D bezeichnen stets absolute Konstanten, während c und d von gewissen, an den jeweiligen Stellen erwähnten Parametern abhängen können.

1. Teil: Hilfssätze über die Funktionen $\Psi(x,y)$ und $\Phi(x,y)$

Die Funktionen Ψ und Φ sind besonders in den letzten Jahren sehr ausführlich studiert worden. Da wir im Folgenden nur relativ schwache Ergebnisse für $\Psi(x,y)$ benötigen werden und die in der Literatur benutzten Methoden zumeist auf analytische Hilfsmittel oder den Primzahlsatz zurückgreifen (s. z.B. Briggs Chowla [2], de Bruijn [4],[5]), wollen wir hier eine obere Abschätzung mit einfachen, elementaren Mitteln herleiten. Herrn Professor Richert verdanke ich entscheidende Hinweise.

Lemma 1: Für $A>1$, $x \geq x_0(A)$ und $y = (\log x)^{\lambda}$ mit $1 \leq \lambda \leq A$ gilt

$$\Psi(x,y) \ll x^{1-\lambda^{-1}+C_1(\log x)^{-1}} .$$

Beweis: Nach einer Idee von Rankin [21] schreiben wir für ein beliebiges η mit

(1.1) $\quad 0 < \eta < 1$

$$\Psi(x,y) = \sum_{\substack{n\leq x \\ p(n)\leq y}} 1 \leq \sum_{\substack{n\leq x \\ p(n)\leq y}} \left(\frac{x}{n}\right)^{\eta} \leq x^{\eta} \sum_{p(n)\leq y} n^{-\eta}$$

$$= x^{\eta} \prod_{p\leq y} \left(1 + \frac{1}{p^{\eta}} + \frac{1}{p^{2\eta}} + \dots \right) = x^{\eta} \prod_{p\leq y} \left(1 - \frac{1}{p^{\eta}} \right)^{-1} .$$

Mit $a_0 = a_0(\eta)$ bezeichnen wir die größte Zahl a mit

(1.2) $\quad \eta\, 2^a < 1.$

Wir schließen weiter

$$\Psi(x,y) \le x^{\eta} \prod_{p\le y} \left\{ (1+\frac{1}{p^{\eta}})\ (1+\frac{1}{p^{\eta}})^{-1}\ (1-\frac{1}{p^{\eta}})^{-1} \right\}$$

$$= x^{\eta} \prod_{p\le y} \left\{ (1+\frac{1}{p^{\eta}})\ (1-\frac{1}{p^{2\eta}})^{-1} \right\}$$

$$= x^{\eta} \prod_{p\le y} \left\{ (1+\frac{1}{p^{\eta}})\ (1+\frac{1}{p^{2\eta}})\ (1-\frac{1}{p^{4\eta}})^{-1} \right\}$$

$$= \ldots = x^{\eta} \prod_{p\le y} \left\{ (1+\frac{1}{p^{\eta}})\ \ldots\ (1+\frac{1}{p^{2^{a_0}\eta}})\ (1-\frac{1}{p^{2^{a_0+1}\eta}})^{-1} \right\}$$

$$\le x^{\eta} \prod_{p\le y} \left\{ (1+\frac{1}{p^{\eta}})^{a_0+1}\ (1-\frac{1}{p})^{-1} \right\}$$

$$\le D_1 \log y\ x^{\eta} \prod_{p\le y} (1+\frac{1}{p^{\eta}})^{a_0+1}$$

$$\le D_1 \log y\ x^{\eta} \prod_{p\le y} \exp((a_0+1)\frac{1}{p^{\eta}})$$

$$= D_1\, x^{\eta} \log y\ \exp((a_0+1) \sum_{p\le y} \frac{1}{p^{\eta}}) \quad . \tag{1.3}$$

Wir schreiben

$$\sigma = 1 - \eta \qquad (\text{also } 0<\sigma<1). \tag{1.4}$$

Die im Exponenten stehende Summe berechnen wir mit den bekannten Abschätzungen

$$\sum_{p\le y} \frac{1}{p} \le D_2 \log_2 y\ , \qquad \sum_{p\le y} \frac{(\log p)^b}{p} \le D_2\, (\log y)^b \quad (b=1,2,\ldots):$$

$$\sum_{p\le y} \frac{1}{p^{\eta}} = \sum_{p\le y} \frac{1}{p} \exp(\sigma \log p) = \sum_{p\le y} \frac{1}{p} \sum_{b=0}^{\infty} \frac{(\sigma \log p)^b}{b!} =$$

$$= \sum_{\leq y} \frac{1}{p} + \sum_{b=1}^{\infty} b\,(b!)^{-1} \sum_{p\leq y} \frac{(\log p)^b}{p}$$

$$\leq D_2 \log_2 y + D_2 \sum_{b=1}^{\infty} \frac{\sigma^b}{b!} (\log y)^b \leq D_2 \log_2 y + D_2\, y^{\sigma} .$$

Zusammen mit (1.3) liefert dies

$$\Psi(x,y) \leq x^{1-\sigma} \log y \exp\left\{ D_2 \log_2 y\,(a_0+1) + D_2\,(a_0+1) y^{\sigma} \right\}$$

$$(1.5) \qquad = D_1\, x \exp\left\{ -\sigma \log x + D_2(a_0+2)\log_2 y + D_2(a_0+1) y^{\sigma} \right\}$$

Wir setzen nun $\sigma \log x = \frac{\log x}{\log y} \log\left(\frac{\log x}{\log y}\right)$, oder,

wenn wir $\frac{\log x}{\log y}$ durch u abkürzen,

$$(1.6) \qquad \sigma = \frac{\log u}{\log y} , \qquad \eta = 1 - \frac{\log u}{\log y} .$$

Man kann sofort nachprüfen, daß für die in den Voraus= setzungen genannten x und y Zeile (1.1) erfüllt ist. Es ist

$$(1.7) \qquad u = \frac{\log x}{\lambda \log_2 x} , \qquad \log u = \log_2 x - \log_3 x - \log\lambda .$$

Aus (1.2) und (1.7) folgt

$$a_0 \log 2 < -\log\eta = -\log(1-\sigma) = \log\frac{1}{1-\sigma} \leq \frac{\sigma}{1-\sigma} = \frac{\log u}{\log y - \log u}$$

$$\leq \frac{\log_2 x}{\lambda \log_2 x - \log_2 x + \log_3 x} \leq \frac{\log_2 x}{\log_3 x} , \qquad \text{also}$$

$$(1.8) \qquad a_0 + 2 \leq 2\,\frac{\log_2 x}{\log_3 x} .$$

(1.5), (1.6), (1.7) und (1.8) führen nun schnell zur

Behauptung

$$\Psi(x,y) \le D_1 \, x \, \exp\left\{-u\log u + 2D_2 \frac{\log_2 x}{\log_3 x} 2\log_3 x + D_2 \frac{\log_2 x}{\log_3 x} u\right\}$$

$$= D_1 \, x \, \exp\left\{-\lambda^{-1} \log x + \frac{C_1 \log x}{\log_3 x}\right\} .$$

Im nächsten Lemma wird eine Ψ-Summe mit einem einfachen Gewicht behandelt. Selbstverständlich kann die Behauptung durch partielle Summation aus den bekannten Ψ-Abschätzungen hergeleitet werden. Doch wollen wir auch hier den elementaren Weg einschlagen.

Lemma 2: Sei $x \ge 10$, $z = \exp(\frac{1}{15} \frac{\log x \log_3 x}{\log_2 x})$.

Dann gilt

$$\sum_{\substack{n>x^{1/3} \\ p(n)\le z}} \frac{1}{n} \ll (\log x)^{-3} .$$

Beweis: Wieder schreiben wir nach Rankin für $x \ge x_0$

$$S = \sum_{\substack{n>x^{1/3} \\ p(n)\le z}} \frac{1}{n} \le \sum_{\substack{n>x^{1/3} \\ p(n)\le z}} \left(\frac{n}{x^{1/3}}\right)^{\eta} \frac{1}{n} ,$$

wobei wir $\eta \in [0,1/2]$ später festlegen werden. Wir formen weiter um:

$$S \le x^{-\eta/3} \sum_{\substack{n \\ p(n)\le z}} \frac{n^{\eta}}{n} = x^{-\eta/3} \prod_{q\le z} \left(1 + \frac{q^{\eta}}{q} + \frac{q^{2\eta}}{q^2} + \ldots\right) \le$$

$$\leq x^{-\eta/3} \prod_{q\leq z} \left(1 + \frac{q^\eta}{q} + D_3 \frac{1}{q^{3/2}}\right)$$

$$\leq D_4 x^{-\eta/3} \prod_{q\leq z} \left(1+ \frac{q^\eta}{q}\right) = D_4 x^{-\eta/3} \prod_{q\leq z} \left\{ \left(1+ \frac{1}{q}\right) \frac{\left(1+\frac{q^\eta}{q}\right)}{\left(1+\frac{1}{q}\right)} \right\}$$

$$\leq D_5 \log z\, x^{-\eta/3} \prod_{q\leq z} \left(1 + \frac{q^\eta-1}{q} + D_6 \frac{1}{q^{3/2}}\right)$$

$$\leq D_7 \log x\, x^{-\eta/3} \prod_{q\leq z} \left(1 + \frac{q^\eta-1}{q}\right) ,$$

$$(2.1) \qquad S \leq D_7 \log x\, x^{-\eta/3} \exp\Big(\sum_{q\leq z} \frac{q^\eta-1}{q} \Big) .$$

Ähnlich wie im Beweis zu Lemma 1 folgt

$$\sum_{q\leq z} \frac{q^\eta-1}{q} = \sum_{q\leq z} \frac{1}{q} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\eta^\nu \log^\nu q}{\nu!} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\eta^\nu}{\nu!} \sum_{q\leq z} \frac{\log^\nu q}{q}$$

$$\leq D_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\eta^\nu}{\nu!} \log^\nu z \leq D_2\, z^\eta .$$

Dies setzen wir in (2.1) ein:

$$(2.2) \quad S \leq D_7\, x^{-\eta/3} \log x \exp(D_2 z^\eta)$$

$$= D_7 \log x \exp\left(-\frac{\eta}{3} \log x + D_2 z^\eta\right) , \qquad \eta \in [0,1/2].$$

Wir wählen nun $\eta = \frac{13 \log_2 x}{\log x}$. (Für $x \geq x_0$ ist $0<\eta<\frac{1}{2}$).

Die letzten Zeilen bedingen

$$S \le D_7 \log x \exp\left\{ -\frac{13}{3} \log_2 x + D_2 \exp\left(\frac{13}{15} \frac{\log x \log_3 x}{\log_2 x} \frac{\log_2 x}{\log x}\right)\right\}$$

$$= D_7 \log x \exp\left\{ -\frac{13}{3} \log_2 x + D_2 (\log_2 x)^{13/15} \right\}$$

$$< D_8 \log x \exp(-4 \log_2 x) = D_8 (\log x)^{-3} ,$$

woraus sich sofort die Behauptung ergibt.

Lemma 3: Sei $t_1 > t_2 \ge 2$, $u = \frac{\log t_1}{\log t_2}$,

$1 \le u \le t_2^{1/2} (\log t_2)^{-1}$. Sei Q eine Menge von Primzahlen, die alle $\le t_2$ sind. $\Phi(t_1, Q)$ bezeichne die Anzahl der $n \le t_1$, die durch kein $q \in Q$ teibar sind. Dann gilt gleichmäßig in t_1, t_2 und Q

$$\Phi(t_1, Q) = t_1 \prod_{q \in Q} (1-q^{-1}) \left\{ 1 + O(\log^3 t_2 \exp(-u \log u - u \log_2 u + C_2 u)) \right\} .$$

Der Beweis verläuft völlig analog dem zu Zeile (1.13) in de Bruijn [3]. Dort wird nur der Fall $Q = \{q < t_2\}$ behandelt. Das gleiche Problem läßt sich auch mit Siebmethoden erfolgreich angreifen (s. z.B. Buchstab [6], Kubilius [14], Lemma 1.4). In [14] wird das Fehlerglied durch $O(\exp(-Du))$ abgeschätzt. Mit der Methode, die wir zum Beweis von Lemma 2 verwendeten, ließe sich diese Abschätzung verbessern. Wegen der verhältnismäßig langen Rechnungen wollen wir hier nicht darauf eingehen.

2. Teil: Abschätzung der Summen $\sum_{p\le x} \Big| \sum_{q\le y} (q/p) \Big|^l$

Lemma 4: Seien $q_1,\dots,q_k$ verschiedene Primzahlen, $a_i = +1$ oder $= -1$ für $1\le i\le k$.

Dann liegen alle Primzahlen p mit

$(q_1/p) = a_1, \dots, (q_k/p) = a_k$ (und nur diese)

in gewissen $2^{-k}\,\phi(4q_1\dots q_k)$ primen Restklassen mod $4q_1\dots q_k$.

Das Lemma ist eine direkte Verallgemeinerung von Lemma 1.1 in Barban [1], siehe auch Erdös [10].

Wir gehen nun daran, die angekündigten Abschätzungen herzuleiten.

Lemma 5: a) Für $\frac{1}{2}\log x < y \le (\log x)^A$ ($A>1$)

gilt (mit von A abhängender <<- Konstante)

$$\sum_{p\le x} \Big| \sum_{q\le y} \left(\frac{q}{p}\right) \Big| \ll \Pi(x)\,\Pi(y)\,\left(\frac{\log_2 x}{\log x}\right)^{1/2}.$$

b) Für $y \le \frac{1}{2}\log x$ gilt

$$\sum_{p\le x} \Big| \sum_{q\le y} \left(\frac{q}{p}\right) \Big| \ll \Pi(x)\,(\Pi(y))^{1/2}.$$

Beweis zu a): Das Intervall $[2,y]$ kann so in $\ll \frac{y}{\log x}$ Intervalle I_ν eingeteilt werden, daß in jedem I_ν gilt

$$(5.1) \qquad 4 \prod_{p\in I_\nu} p \le x^{1/2}.$$

Wir erhalten

$$(5.2)\quad \sum_{p\le x}\Big|\sum_{q\le y}\Big(\frac{q}{p}\Big)\Big| \le \sum_{p\le x}\sum_{\nu}\Big|\sum_{q\in I_\nu}\Big(\frac{q}{p}\Big)\Big|$$

$$= \sum_{\nu}\sum_{p\le x}\Big|\sum_{q\in I_\nu}\Big(\frac{q}{p}\Big)\Big| .$$

Für festes ν seien $q_1,\dots,q_k$ die Primzahlen aus I_ν. V durchlaufe alle Vektoren $\{a_1,\dots,a_k\}$ mit $a_j=+1$ oder $=-1$. Dann implizieren Lemma 4 und der Satz von Brun-Titchmarsh, der dank (5.1) anwendbar ist,

$$\sum_{\substack{p\le x\\ (\frac{q_i}{p})=a_i,\ i=1,\dots,k}} 1 \ll \frac{\phi(4q_1\dots q_k)}{2^k}\,\frac{\mathrm{Li}\,x}{\phi(4q_1\dots q_k)} \ll 2^{-k}\,\Pi(x) ,$$

und daher

$$(5.3)\quad \sum_{p\le x}\Big|\sum_{q\in I_\nu}\Big(\frac{q}{p}\Big)\Big| \ll 2^{-k}\,\Pi(x)\sum_{V}\Big|\sum_{j=1}^{k}a_j\Big| + \sum_{p\in I_\nu}\Big|\sum_{q\in I_\nu}\Big(\frac{q}{p}\Big)\Big| .$$

Die zweite Summe rechts ist wegen

$$(5.4)\quad k = \sum_{p\in I_\nu} 1 \ll \frac{\log x}{\log_2 x}$$

(mit von ν unabhängiger <<- Konstante)

$$\ll \log^2 x .$$

Es ist, da k o.B.d.A. als gerade vorausgesetzt werden kann,

$$\sum_{V} \Big| \sum_{j=1}^{k} a_j \Big| = \sum_{V} \Big| \sum_{\substack{j=1 \\ a_j=1}}^{k} 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ a_j=-1}}^{k} 1 \Big| = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} |l-(k-l)|$$

$$= \sum_{l=0}^{k/2} \binom{k}{l} (k-2l) + \sum_{l=k/2+1}^{k} \binom{k}{l} (2l-k)$$

$$= \sum_{l=0}^{k/2} \binom{k}{l} (k-2l) + \sum_{l=0}^{k/2} \binom{k}{k-l} (k-2l)$$

$$= 2 \sum_{l=0}^{k/2} \binom{k}{l} (k-2l)$$

$$= k \left\{ \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} + \binom{k}{k/2} - 2 \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l-1} \right\}$$

$$= k \left\{ 2^k + \binom{k}{k/2} - 2 \cdot 2^{k-1} \right\} = k \binom{k}{k/2}$$

$$\ll \frac{k}{k^{1/2}} 2^k = k^{1/2} 2^k .$$

Zusammen mit (5.3) erhält man hieraus

$$\sum_{p \le x} \Big| \sum_{q \in I_\nu} \left(\frac{q}{p}\right) \Big| \ll \frac{\Pi(x)}{2^k} 2^k k^{1/2} + \log^2 x$$

$$\ll \Pi(x) \left(\frac{\log x}{\log_2 x}\right)^{1/2} .$$

Durch Summation über ν folgt

$$\sum_{p \le x} \Big| \sum_{q \le y} \left(\frac{q}{p}\right) \Big| \ll \Pi(x) \left(\frac{\log x}{\log_2 x}\right)^{1/2} \frac{y}{\log x} \ll$$

$$\ll \Pi(x)\frac{\Pi(y)}{(\log x)^{1/2}}\,(\log_2 x)^{1/2} \quad .$$

Der Beweis zu b) verläuft analog. Hier braucht man nur ein Intervall I_1 zu betrachten.

Lemma 6: Sei $\lambda \geq 1$; $x,y \geq y_0$. Dann gilt für die Anzahl $A(x,y,\lambda)$ der $p \leq x$ mit

$$\Big|\sum_{q\leq y}\left(\frac{q}{p}\right)\Big| > \lambda^{-1}\,\Pi(y)$$

die Abschätzung

$$A(x,y,\lambda) \leq 4\,\exp\left\{\left(\frac{2\log x}{\log y}+1\right)\log\left(2\lambda^2(2\log x+\log y)\right)\right\} .$$

Beweis: Wir wenden das "Große Sieb" in der Form an, in der es bei Burgess-Elliott [8] zu finden ist.

$$\sum_{p\leq x}\ \sum_{\chi \bmod p}^{*}\ \Big|\sum_{q\leq y}\chi(q)\Big|^{2r} \leq r!\,\left(y^{r/2}+x\right)^2\,\Pi^r(y) \qquad (r=1,\ldots) .$$

Wenn wir links nur über den quadratischen Charakter summieren und $r = \left[\frac{2\log x}{\log y}\right]+1$ setzen, erhalten wir

$$(6.1)\qquad \sum_{p\leq x}\Big|\sum_{q\leq y}\left(\frac{q}{p}\right)\Big|^{2r} \leq 4r!\,y^r\,\Pi^r(y)$$

und daraus

$$A(x,y,\lambda) \le \lambda^{2r}\,(\Pi(y))^{-2r}\,4r!\,y^r\,\Pi^r(y) \le 4\,(2\lambda^2\,\log y\,r)^r$$

$$\le 4\,\exp\Big\{\Big(\frac{2\log x}{\log y}+1\Big)\log\big(2\lambda^2\,(2\log x+\log y)\big)\Big\}.$$

Bemerkung zu Lemma 6: Obwohl das "Große Sieb" nur in so schwacher Form benutzt wurde, ist für gewisse y das Ergebnis bemerkenswert gut. Zum Beispiel für $y=x$, $r=2$ bekommen wir

$$\sum_{p\le x}\Big|\sum_{q\le x}\Big(\frac{q}{p}\Big)\Big|^4 \ll \frac{x^4}{(\log x)^2}\ .$$

Mit der Hölderschen Ungleichung ergibt dies

$$\sum_{p\le x}\Big|\sum_{q\le x}\Big(\frac{q}{p}\Big)\Big| \ll x^{7/4}\,(\log x)^{-5/4}\ ,$$

welches so gut ist wie folgendes, ohne "Großes Sieb" bewiesenes Resultat von Heilbronn [13]:

$$\sum_{p\le x}\sum_{q\le x}\Big(\frac{q}{p}\Big) \ll x^{7/4}\,(\log x)^{-5/4}\ .$$

3. Teil: Die Anzahl der $a\le x^{2/3}$, welche quadratischer Rest bzw. Nicht-Rest modp sind

Während die Pólya-Vinogradov'sche Charaktersummenabschätzung z.B.

$$N_{[x^{2/3}]}(p) \ll x^{2/3} \qquad (p \le x)$$

beinhaltet, sind solche Beziehungen für $n_k(p)$ und $r_k(p)$ nicht ohne weiteres zu erlangen. Die Vinogradov'schen Abschätzungen [22] und [23] beziehen sich nur auf Summen der Gestalt

$$\sum_{q \le y} \chi(q+k) \qquad (\chi \neq \chi_0,\ \chi = \chi \bmod p,\ k \not\equiv 0\ (p)).$$

Auch die Linnik'sche Ungleichung ([17], Theorem 1)

$$\sum_{q \le y} \chi(q) \ll \frac{y}{\log y}\left\{ \exp(-C_3 \frac{\log y}{\log k}) + \frac{1}{\log k} \right\}$$

(χ ist ein komplexer Charakter modk)

nützt uns hier nichts, da wir erstens Aussagen über den reellen Charakter (n/p) benötigen und zweitens der Linnik'sche Satz nur für $y \ge k^{C_4}$ (C_4 genügend groß) nichttriviale Ergebnisse liefert.

Lemma 7 und 8 enthalten bedeutend schwächere Aussagen über die Anzahl der

$$q \le x^{2/3} \quad \text{mit} \quad \left(\frac{q}{p}\right) = -1 \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{q}{p}\right) = +1 \qquad (p \le x).$$

Lemma 7: Für $x \ge x_0$ und $p \le x$ gilt:

Die Anzahl der $q \le x^{2/3}$ mit $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ ist

$$\ge \exp\left\{ \frac{1}{16} \frac{\log x \log_3 x}{\log_2 x} \right\}.$$

Beweis: Die Beweisidee ist, im Fall, daß es nur wenige $q \le x^{2/3}$ mit $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ gibt, eine asymptotische Entwicklung für

$\sum_{n\le x^{2/3}} \left(\frac{n}{p}\right)$ zu finden, die im Widerspruch zur

Pólya-Vinogradov'schen Abschätzung

$$(0) \qquad \sum_{n\le x^{2/3}} \left(\frac{n}{p}\right) \ll p^{1/2} \log p$$

steht.

Sei $f(n)$ eine vollständig multiplikative zahlentheoretische Funktion mit den Eigenschaften:

$$f(q) = \begin{cases} +1 \text{ oder } = -1 \\ \text{oder } = 0 \text{ für höchstens ein } q>2 , \end{cases}$$

$$\sum_{\substack{q\le x^{2/3} \\ f(q)\neq +1}} 1 < y = \exp\left(\frac{1}{16}\frac{\log x \log_3 x}{\log_2 x}\right) .$$

Sei $Q = \{ q \mid f(q) = -1 \text{ oder } = 0 \}$.

Dann folgt mit der Bezeichnung $P = \prod_{\substack{q\in Q \\ q>y(\log x)^3}} q$

$$(7.1) \qquad \sum_{n\le x^{2/3}} f(n) = \sum_{\substack{n\le x^{2/3} \\ (n,P)=1}} f(n) + \sum_{\substack{n\le x^{2/3} \\ (n,P)>1}} f(n)$$

$$= \Sigma_1 + \Sigma_2 \quad , \text{ bzw.}$$

Σ_2 schätzen wir trivial ab

$$(7.2) \qquad |\Sigma_2| \le \sum_{\substack{q\in Q \\ q>y(\log x)^3}} \sum_{\substack{n\le x^{2/3} \\ n\equiv 0(q)}} 1 \le$$

$$(7.2) \quad \leq x^{2/3} \sum_{\substack{y\log^3 x < q \leq x^{2/3} \\ q\in Q}} \frac{1}{q} \leq \frac{x^{2/3}}{y \log^3 x} \; y = \frac{x^{2/3}}{\log^3 x} \; .$$

Wir definieren eine stark multiplikative zahlentheoretische Funktion f' durch

$$f'(q) = \begin{cases} f(q) & \text{für} \quad q \leq y(\log x)^3 \, , \\ 1 & \text{für} \quad q > y(\log x)^3 \, , \end{cases}$$

und zeigen wie oben

$$(7.3) \quad \Big| \sum_{\substack{n\leq x^{2/3} \\ (n,P)>1}} f'(n) \Big| \leq \frac{x^{2/3}}{\log^3 x} \; .$$

In Σ_1 sind $f(n)$ und $f'(n)$ identisch und daher ist aufgrund von (7.1) --- (7.3)

$$(7.4) \quad \sum_{n\leq x^{2/3}} f(n) = \sum_{n\leq x^{2/3}} f'(n) + O\Big(\frac{x^{2/3}}{\log^3 x} \Big) \; .$$

Wir setzen $Q_1 = \{ q\in Q, \; q \leq y(\log x)^3 \}$.

n_1 durchlaufe Zahlen, deren sämtliche Primteiler in Q_1 liegen; n_2 solche, die $\not\equiv 0 \bmod q$ sind für alle $q\in Q_1$. Mit diesen Vereinbarungen und der Bezeichnung aus Lemma 3 folgt

$$(7.5) \quad \sum_{n\leq x^{2/3}} f'(n) = \sum_{n_1 n_2 \leq x^{2/3}} f'(n_1 n_2)$$

$$= \sum_{n_1 n_2 \leq x^{2/3}} f'(n_1)$$

$$(7.5) \quad = \sum_{n_1 \le x^{2/3}} \Phi\left(\frac{x^{2/3}}{n_1}, Q_1\right) f(n_1)$$

$$= \sum_{n_1 \le x^{1/3}} \Phi\left(\frac{x^{2/3}}{n_1}, Q_1\right) f(n_1)$$

$$+ \sum_{x^{1/3} < n_1 \le x^{2/3}} \Phi\left(\frac{x^{2/3}}{n_1}, Q_1\right) f(n_1)$$

$$= \Sigma_3 + \Sigma_4 \quad , \text{ bzw.}$$

Zur Berechnung von Σ_3 ziehen wir Lemma 3 heran. Man überzeugt sich leicht, daß es für $x \ge x_0$ hier anwendbar ist.

Für $n_1 \le x^{1/3}$, also $x^{1/3} \le \frac{x^{2/3}}{n_1} \le x^{2/3}$, ist

$$u = \frac{\log(x^{2/3}/n_1)}{\log(y \log^3 x)} \ge \frac{1/3 \log x}{\frac{1}{16} \frac{\log x \log_3 x}{\log_2 x} + 3\log_2 x}$$

$$\ge \frac{5{,}3 \log_2 x}{\log_3 x} \quad ,$$

$\log u \ge 0{,}99 \log_3 x$, also

$$-u\log u - u\log_2 u + C_2 u \le -5{,}3 \cdot 0{,}99 \log_2 x \le -5{,}1 \log_2 x \, .$$

Wir erhalten

$$\Sigma_3 = \sum_{n_1 \le x^{1/3}} f(n_1) \frac{x^{2/3}}{n_1} \prod_{q \in Q_1} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \left\{1 + O(\log^3 x \, e^{-5{,}1 \log_2 x})\right\}$$

$$= x^{2/3} \prod_{q \in Q_1} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \left\{ \sum_{n_1 \le x^{1/3}} \frac{f(n_1)}{n_1} + O\Big(\sum_{n \le x^{1/3}} \frac{1}{n} \log^{-2{,}1} x \Big) \right\}$$

$$= x^{2/3} \prod_{q\in Q_1} (1-\frac{1}{q}) \left\{ \sum_{n_1} \frac{f(n_1)}{n_1} + O\Big(\sum_{n_1>x^{1/3}} \frac{1}{n_1} \Big) + O(\log^{-1,1} x) \right\} .$$

Der erste Term in der geschweiften Klammer ist

$$= \prod_{q\in Q_1} (1 + \frac{f(q)}{q} + \frac{f^2(q)}{q^2} + \dots) = \prod_{q\in Q_1} (1 - \frac{f(q)}{q})^{-1} .$$

Da für $q\in Q_1$ $f(q)=-1$ oder $=0$ ist, folgt

$$\sum_{n_1} \frac{f(n_1)}{n_1} \geq \prod_{q\leq x} (1+\frac{1}{q})^{-1} >> (\log x)^{-1} .$$

Den zweiten Term können wir mit Lemma 2 abschätzen, denn für $x\geq x_0$ ist

$$y(\log x)^3 \leq \exp(\frac{1}{15} \frac{\log x \log_3 x}{\log_2 x}) \qquad \text{und daher}$$

$$\sum_{n_1>x^{1/3}} \frac{1}{n_1} << (\log x)^{-3} .$$

Wir fassen zusammen:

$$\Sigma_3 = x^{2/3} \prod_{q\in Q_1} (1-\frac{1}{q}) \prod_{q\in Q_1} (1-\frac{f(q)}{q})^{-1} \left\{ 1 + O((\sum_{n_1} \frac{f(n_1)}{n_1})^{-1} (\log^{-3} x + \log^{-1,1} x)) \right\}$$

$$(7.6) \quad = x^{2/3} \prod_{q\in Q_1} \frac{1-q^{-1}}{1-\frac{f(q)}{q}} \left\{ 1 + O(\log^{-0,1} x) \right\} .$$

Zur Abschätzung von Σ_4 verwenden wir wieder Lemma2:

$$\Sigma_4 = \sum_{x^{1/3}<n_1\le x^{2/3}} \Phi(\frac{x^{2/3}}{n_1}, Q_1) \ll x^{2/3} \sum_{x^{1/3}<n_1\le x^{2/3}} \frac{1}{n_1}$$

$$\le x^{2/3} \sum_{\substack{n>x^{1/3} \\ p(n)\le y\log^3 x}} \frac{1}{n} \ll \log^{-3} x \ ,$$

$$(7.7) \qquad \Sigma_4 \ll x^{2/3} \log^{-1} x \prod_{q\in Q_1} (1-\frac{1}{q})(1-\frac{f(q)}{q})^{-1} \ .$$

Aus (7.4),..,(7.7) entnehmen wir schließlich für $x\ge x_0$

$$(7.8) \qquad \sum_{n\le x^{2/3}} f(n) = x^{2/3} \prod_{q\in Q_1} (1-\frac{1}{q})(1-\frac{f(q)}{q})^{-1} \left\{ 1 + O(\log^{-0,1} x) \right\}$$

$$\ge D_9 \frac{x^{2/3}}{\log^2 x} \ .$$

Wir nehmen nun an, die Behauptung des Lemmas sei für ein $p\le x$ $(x\ge x_0)$ falsch. Dann erfüllt $f(n)=(n/p)$ offenbar die zu Beginn des Beweises angegebenen Bedingungen und wir erhalten (7.8) für (n/p). Eine solche Ungleichung steht aber im Widerspruch zu (0). Damit haben wir das Lemma bewiesen.

<u>Lemma 8:</u> Für jedes $A > 0$, $x \ge x_0(A)$ und $p \le x$ ist

$$\sum_{\substack{q\le x^{2/3} \\ (q/p)=1}} 1 \ge (\log x)^A \ .$$

Beweis: Linnik und A.I.Vinogradov [18] bewiesen folgenden Satz:

Für $p^{1/4+\varepsilon} \le y \le p^{1/2}$ gilt gleichmäßig in p und y

$$\sum_{n\le y} (1-\frac{n}{y}) \sum_{k|n} (\frac{k}{p}) = \frac{y}{2} L(1,\chi_p) + O(y^{1-\eta})$$

($\eta=\eta(\varepsilon)>0$, $L(s,\chi_p)$ ist die dem quadratischen Charakter (n/p) zugeordnete L-Funktion).

Wir verwenden statt der Burgess'schen Charaktersummenabschätzung [7] die einfachere Ungleichung von Pólya-Vinogradov und zeigen im übrigen völlig analog (siehe Elliott [9])

$$(8.1) \quad \sum_{n\le y} (1-\frac{n}{y}) \sum_{k|n} \mu^2(k) (\frac{k}{p}) = \frac{3}{\pi^2} y\, L(1,\chi_p) + O(yp^{-\delta})$$

gleichmäßig in p und y für $y \ge p^{2/3}$ und ein festes $\delta>0$.

Eine Folgerung aus dem Satz von Siegel über die Verteilung der Nullstellen der L-Funktionen besagt

$$(8.2) \quad L(1,\chi_p) > \frac{c(\varepsilon)}{p^{\varepsilon}} \qquad \text{für jedes } \varepsilon > 0 .$$

(s. Prachar [20], S.146)

Da wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A \ge A_0$ voraussetzen können, erhalten wir für $x \ge x_0(A)$, $p_0 \le p \le x$ und $y = x^{2/3}$ aus (8.1) und (8.2)

$$x^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2A} \le \frac{x^{2/3}}{p^{1/2A}} \le \sum_{n\le x^{2/3}} (1-\frac{n}{x^{2/3}}) \sum_{k|n} \mu^2(k) (\frac{k}{p})$$

$$\leq \sum_{n\leq x^{2/3}} \prod_{q|n} (1+(\tfrac{q}{p})) \leq \sum_{\substack{n\leq x^{2/3} \\ q|n \Rightarrow (\frac{q}{p})\neq -1}} 2^{\nu(n)} ,$$

$$(8.3) \qquad x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2A}} \leq x^{\frac{2}{3}\frac{1}{\log_2 x}} \sum_{\substack{n\leq x^{2/3} \\ q|n \Rightarrow (\frac{q}{p})\neq -1}} 1 .$$

(Im letzten Schritt haben wir die bekannte Ungleichung

$$2^{\nu(n)} \leq \tau(n) \leq n^{\frac{1}{\log_2 n}} \quad \text{für} \quad n\geq n_0 \quad \text{(s.[20],S.24)}$$

benutzt) .

Wir nehmen nun an, die Behauptung sei für ein $p\geq p_0$ falsch, d.h. die Anzahl der $q\leq x^{2/3}$ mit $(q/p)=1$ sei $< (\log x)^A$. Die letzte Summe in (8.3) ist offenbar am größten, wenn die $q\leq x^{2/3}$ mit $(q/p)\neq -1$ am kleinsten sind. Anders ausgedrückt:

$$(8.4) \qquad \sum_{\substack{n\leq x^{2/3} \\ q|n \Rightarrow (\frac{q}{p})\neq -1}} 1 \leq \Psi(x^{2/3},(\log x)^{A+1}) \leq \Psi(x^{2/3},(\log x^{2/3})^{A+2}) .$$

Wir wenden Lemma 1 an und erhalten mit (8.3) und (8.4)

$$x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2A}} \leq x^{\frac{2}{3}\frac{1}{\log_2 x}} d_1(A)\, x^{\frac{2}{3}(1-\frac{1}{A+2}+\frac{D_{10}}{\log_3 x})}$$

$$\leq d_1(A)\, x^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3(A+2)}+\frac{D_{11}}{\log_3 x}} .$$

Für $A>6$ ist $\frac{2}{3}-\frac{1}{2A} > \frac{2}{3}-\frac{2}{3(A+2)}$; wir geraten also

im Bereich $x \geq p \geq p_0$ auf einen Widerspruch und die Behauptung ist in diesem Fall bewiesen. Für $p < p_0$ resultiert die Behauptung aus dem Primzahlsatz in Progressionen.

Bemerkung zu Lemma 8: Die Aussage des Lemmas ist äußerst schwach. Man wird versucht sein, zum Beispiel

$$\sum_{q \leq p^{2/3}} \left(\frac{q}{p}\right) = o(\Pi(p^{2/3})) \qquad (p \to \infty)$$

oder etwa nur

$$\sum_{\substack{q \leq p^{2/3} \\ \left(\frac{q}{p}\right)=1}} 1 \geq C\,\Pi(p^{2/3}) \qquad \text{für ein gewisses } C>0 \text{ und } p \geq p_0$$

anzunehmen. Daß ein solcher Satz sehr tief liegen muß, sieht man leicht ein. Aus

$$\sum_{\substack{q \leq p^{A} \\ \left(\frac{q}{p}\right)=1}} 1 \geq D_{12}\,\Pi(p^{A}) \qquad \text{für ein festes } A>0$$

folgt mit (8.1) und (8.2)

$$L(1,\chi_p) \geq \frac{d(A,D_{12})}{\log p}\,.$$

Das Letztere jedoch liegt weit vom heute Erreichbaren entfernt.

4. Teil: Abschätzung der Summen $\sum_{p\le x} \Big| \sum_{n\le y} \left(\frac{n}{p}\right) \Big|^1$

Wir gehen nun daran, zu Lemma 5 und 6 analoge Beziehungen für die Ausdrücke $\sum_{p\le x} \Big| \sum_{n\le y} \left(\frac{n}{p}\right) \Big|^1$ nachzuweisen. Zuerst im Fall kleiner y.

Lemma 9: Für jedes $A > 0$ und $y \le (\log x)^A$ gilt (mit nur von A abhängender $\ll$-Konstante)

$$\sum_{q\le x} \Big| \sum_{n\le y} \left(\frac{n}{p}\right) \Big|^2 \ll \Pi(x)\, y \log y .$$

Beweis: Wir formen den fraglichen Ausdruck in einfacher Weise um

$$\sum_{p\le x} \Big| \sum_{n\le y} \left(\frac{n}{p}\right) \Big|^2 = \sum_{p\le x} \sum_{n_1\le y} \left(\frac{n_1}{p}\right) \sum_{n_2\le y} \left(\frac{n_2}{p}\right)$$

$$= \sum_{p\le x} \sum_{n\le y^2} \left(\frac{n}{p}\right) \sum_{\substack{n=n_1n_2\\ n_i\le y\ (i=1,2)}} 1$$

$$= \sum_{n\le y^2} \sum_{\substack{n=n_1n_2\\ n_i\le y\ (i=1,2)}} \sum_{p\le x} \left(\frac{n}{p}\right)$$

$$= \sum_{kr^2\le y^2} \mu^2(k) \sum_{\substack{kr^2=n_1n_2\\ n_i\le y,\ (i=1,2)}} \sum_{p\le x} \left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{r^2}{p}\right) =$$

$$= \sum_{k\le y^2} \mu^2(k) \sum_{r\le \frac{y}{k^{1/2}}} \sum_{\substack{kr^2=n_1n_2\\ n_i\le y\ (i=1,2)}} \sum_{p\le x} \left(\frac{k}{p}\right) +$$

$$+ O\Big(\sum_{k\le y^2} \mu^2(k) \sum_{r\le \frac{y}{k^{1/2}}} \sum_{\substack{kr^2=n_1n_2\\ n_i\le y\ (i=1,2)}} \sum_{\substack{p\le x\\ p\mid r}} 1 \Big) ,$$

denn $\left(\frac{r^2}{p}\right) = \begin{cases} 0, & \text{falls } p\mid r, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$.

Das O-Glied bringt nur einen geringfügigen Beitrag: Infolge

$$\sum_{\substack{p\le x\\ p\mid r}} 1 \ll \log r \le \log y \quad (r \le y)$$

ist die im O-Glied stehende Summe

$$\ll \log y \sum_{kr^2\le y^2} \mu^2(k) \sum_{\substack{kr^2=n_1n_2\\ n_i\le y\ (i=1,2)}} 1$$

$$\le \log y\ y^2 \ll \Pi(x)\ y \log y .$$

Wir fassen zusammen:

$$(9.1)\quad \sum_{p\le x} \Big| \sum_{n\le y} \left(\frac{n}{p}\right) \Big|^2 = \sum_{1<k\le y^2} \mu^2(k) \sum_{r\le \frac{y}{k^{1/2}}} \rho(kr^2) \sum_{p\le x} \left(\frac{k}{p}\right)$$

$$+ \sum_{r\le y} \rho(r^2) \sum_{p\le x} \left(\frac{1}{p}\right) + O(\Pi(x)\ y \log y)$$

$$= \Sigma_1 + \Sigma_2 + O(\Pi(x)\ y \log y) , \quad \text{bzw.}$$

(mit der Abkürzung $\rho(l) = \sum_{\substack{l=n_1n_2\\ n_i\le y\ (i=1,2)}} 1$) .

Zu Σ_1 : Sei $k \leq y^2$, $\mu^2(k)=1$, $k=q_1 \ldots q_s$. Wie im Beweis zu Lemma5 durchlaufe V alle s-Tupel $\{a_1,\ldots,a_s\}$ mit $a_i=+1$ oder $=-1$ $(i=1,\ldots,s)$. P(V) sei definiert als $a_1 \ldots a_s$. Nach Lemma 4 sind die $q \leq x$ mit $(\frac{q_i}{q})=a_i$ $(i=1,\ldots,s)$ genau die Prim= zahlen aus $M_s=2^{-s}\,\phi(4k)$ primen Restklassen mod $4k$, etwa den durch $l_{1,V}$,..., $l_{M_s,V}$ repräsentierten Rest= klassen. Wir erhalten

$$(9.2)\quad \sum_{q\leq x} (\frac{k}{q}) = \sum_{\substack{q\leq x\\(q,k)=1}} (\frac{k}{q}) = \sum_V P(V) \sum_{i=1}^{M_s} \Pi(x;4k,l_{i,V})$$

$$= \frac{Lix}{2^s} \sum_V P(V) + O\Big(\sum_{\substack{l=1\\(l,4k)=1}}^{4k} |\Pi(x;4k,l) - \frac{Lix}{\phi(4k)}| \Big)$$

Offenbar ist

$$(9.3)\quad \sum_V P(V) = \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_s\\a_i=\pm 1}} a_1 \ldots a_s = \Big(\sum_{a=\pm 1} a \Big)^s = 0 .$$

Das O-Glied in (9.2) schätzen wir mit dem Siegel= schen Primzahlsatz ab (s. Prachar [20], S.144) :

Für $k \leq y^2$ (also nach Voraussetzung $4k \leq 4(\log x)^{2A}$) und $(l,4k)=1$ gilt mit nur von A abhängender $\ll$-Kon= stante

$$(9.4)\quad \Pi(x;4k,l) - \frac{Lix}{\phi(4k)} \ll x \exp(-c_5(\log x)^{1/2}) .$$

Wir summieren über $1<k\le y^2$, verwenden (9.2),(9.3) und (9.4) und erhalten

$$\Sigma_1 \ll x \exp(-C_5(\log x)^{1/2}) \sum_{1<k\le y^2} k\,\mu^2(k) \sum_{r\le \frac{y}{k^{1/2}}} \rho(kr^2)$$

$$\le x \exp(-C_5(\log x)^{1/2}) \sum_{n\le y^2} \sum_{\substack{n=n_1n_2\\ n_i\le y\ (i=1,2)}} 1 \cdot y^2$$

$$\le x \exp(-C_5(\log x)^{1/2})\, y^4 ,$$

(9.5) $\Sigma_1 \ll \Pi(x)\, y \log y$.

Σ_2 liefert den Hauptbeitrag.

$$\Sigma_2 \le \Pi(x) \sum_{r\le y} \rho(r^2) = \Pi(x) \sum_{r\le y} \sum_{\substack{r^2=n_1n_2\\ n_i\le y\ (i=1,2)}} 1 .$$

Seien $n_1,n_2 \le y$, $n_1n_2=r^2$. Dann können wir in eindeutiger Weise schreiben :

$$n_1=k_1k_2^2 ,\ \mu^2(k_1)=1 ,\ k_1\le y ,\ k_2\le \frac{y^{1/2}}{k_1^{1/2}} ;$$

$$n_2=l_1l_2^2 ,\ \mu^2(l_1)=1 ,\ l_1\le y ,\ l_2\le \frac{y^{1/2}}{l_1^{1/2}} .$$

Wegen $n_1n_2=r^2$ muß aber $k_1=l_1$ sein und daher ist

(9.6) $$\Sigma_2 \le \Pi(x) \sum_{k_1\le y} \mu^2(k_1) \sum_{k_2\le \frac{y^{1/2}}{k_1^{1/2}}} \sum_{l_2\le \frac{y^{1/2}}{k_1^{1/2}}} 1$$

$$\le \Pi(x)\, y \sum_{k_1\le y} k_1^{-1}\,\mu^2(k_1) \ll \Pi(x)\, y \log y .$$

(9.1),(9.5) und (9.6) zusammen ergeben nun unmittelbar das Lemma.

Bemerkung: Für $y \le \frac{1}{2}\log x$ (bzw. $y \le (1-\varepsilon)\log x$) reicht zum Beweis von Lemma 9 der Satz von Brun-Titchmarsh. Das sei hier kurz skizziert:

Durchlaufe $f(n)$ alle $2^{\Pi(y)}$ vollständig multiplikativen zahlentheoretischen Funktionen mit

$$f(q) = \begin{cases} +1 \text{ oder } -1 & \text{für } q \le y, \\ 1 & \text{für } q > y. \end{cases}$$

Wie im obigen Beweis können wir schreiben

$$(9.7) \quad \sum_f \Big\{ \sum_{n \le y} f(n) \Big\}^2 =$$

$$= \sum_{\substack{k \le y^2 \\ p(k) \le y}} \mu^2(k) \sum_{r \le \frac{y}{k^{1/2}}} \sum_{\substack{kr^2 = n_1 n_2 \\ n_i \le y \ (i=1,2)}} \sum_f f(k) .$$

Für $k>1$, $\mu^2(k)=1$, $k = q_1 \dots q_s$ ($q_i \le y$, $i=1,\dots,s$) erhalten wir

$$\sum_f f(k) = \sum_{\substack{a_1,\dots,a_s \\ a_i = \pm 1}} a_1 \dots a_s \sum_{f(q_i)=a_i,\, i=1,\dots,s} 1$$

$$= 2^{\Pi(y)-s} \sum_{\substack{a_1,\dots,a_s \\ a_i = \pm 1}} a_1 \dots a_s = 0 .$$

Im Falle $k=1$ ist

$$\sum_f f(k) = \sum_f 1 = 2^{\Pi(y)} .$$

Wir setzen in (9.7) ein und rechnen wie oben

$$(9.8)\quad \sum_f \Big\{ \sum_{n\le y} f(n) \Big\}^2 = 2^{\Pi(y)} \sum_{r\le y} \sum_{\substack{r^2=n_1n_2\\ n_i\le y\\ i=1,2}} 1 \ll 2^{\Pi(y)}\, y \log y.$$

Andererseits kann man leicht einsehen

$$(9.9)\quad \sum_{p\le x} \Big\{ \sum_{n\le y} \Big(\frac{n}{p}\Big) \Big\}^2 = \sum_f \sum_{\substack{y<p\le x\\ (\frac{q}{p})=f(q)\ \forall q\le y}} \Big\{ \sum_{n\le y} f(n) \Big\}^2 + O(\Pi(y)\, y^2) .$$

Lemma 4 und der Satz von Brun-Titchmarsh (der wegen $y \le \frac{1}{2}\log x$, also $4 \prod_{p\le y} p \le x^{3/4}$, hier anwendbar ist) implizieren

$$\sum_{\substack{y<p\le x\\ (\frac{q}{p})=f(q)\ \forall q\le y}} 1 \ll \frac{x}{\log x} \frac{1}{\phi(4\prod_{p\le y} p)} \frac{\phi(4\prod_{p\le y} p)}{2^{\Pi(y)}} \ll \Pi(x)\, 2^{-\Pi(y)} .$$

Mit (9.8) und (9.9) folgt nun unmittelbar

$$\sum_{p\le x} \Big\{ \sum_{n\le y} \Big(\frac{n}{p}\Big) \Big\}^2 \ll \Pi(x)\, y \log y ,$$

was wir zeigen wollten.

Im Falle relativ großer y benutzen wir wieder das "Große Sieb". Wir geben zwei Methoden an.

Lemma 10a: Sei $\log x < y \le x^{1/2}$ und sei P eine Menge von ungeraden Primzahlen $\le x$ mit $|P| \ge xy^{-1}$. Dann gilt

$$\sum_{p \in P} \Big| \sum_{n \le y} \left(\frac{n}{p}\right) \Big| \ll |P|^{2/3} x^{1/3} y^{2/3} .$$

Beweis: Jedes natürliche n läßt sich eindeutig schreiben

$$n = 2^{a_n} k_n r_n^2 \quad \text{mit} \quad (k_n r_n, 2) = 1 , \quad \mu^2(k_n) = 1 .$$

Seien $x, y \ge y_0$. Für $0 < \eta < 1$ (welches wir später festlegen werden) finden wir

$$\sum_{\substack{n \le y \\ k_n \le y^{1-\eta}}} 1 \le \sum_{k \le y^{1-\eta}} \mu^2(k) \cdot \sum_{r \, k r^2 \le y} 1$$

$$(10.1) \qquad \le \sum_{k \le y^{1-\eta}} \mu^2(k) \left(\frac{y}{k}\right)^{1/2} \ll y^{1-\frac{\eta}{2}}$$

und

$$(10.2) \qquad \sum_{\substack{n \le y \\ a_n > \frac{\eta}{2} \frac{\log y}{\log 2}}} 1 \ll y^{1-\frac{\eta}{2}} .$$

Wir definieren N_η als die Menge der n aus dem Intervall $[1,y]$ mit $k_n > y^{1-\eta}$ und $a_n \le \frac{\eta}{2} \frac{\log y}{\log 2}$.

Für $0 \le a \le \frac{\eta}{2} \frac{\log y}{\log 2}$ sei

$$(10.3) \qquad N_{\eta,a} = \{ n \in N_\eta , \ a_n = a \} .$$

Wir erhalten mit (10.1) und (10.2)

$$\sum_{p\in P} \Big| \sum_{n\le y} \left(\frac{n}{p}\right) \Big| \le \sum_{p\in P,\, p>y^{1/2}} \Big(\Big| \sum_{n\in N_\eta} \left(\frac{n}{p}\right) \Big| + \Big| \sum_{\substack{n\le y \\ n\notin N_\eta}} \left(\frac{n}{p}\right) \Big| \Big)$$

$$+ O(y^{3/2})$$

$$\le \sum_{0\le a\le \frac{\eta}{2}\frac{\log y}{\log 2}} \; \sum_{p\in P,\, p>y^{1/2}} \Big| \sum_{n\in N_{\eta,a}} \left(\frac{n}{p}\right) \Big|$$

$$+ O(y^{1-\frac{\eta}{2}|P|}) + O(y^{3/2})$$

$$(10.4) \quad = \sum_{0\le a\le \frac{\eta}{2}\frac{\log y}{\log 2}} \Sigma_a + O(y^{1-\frac{\eta}{2}|P|+y^{3/2}})$$

mit der Abkürzung

$$(10.5) \quad \Sigma_a = \sum_{\substack{p\in P \\ p>y^{1/2}}} \Big| \sum_{n\in N_{\eta,a}} \left(\frac{n}{p}\right) \Big| .$$

Für festes a nennen wir P_a^+ (bzw. P_a^-) die Menge der $p\in P$ mit

$$p>y^{1/2} \quad \text{und} \quad \sum_{n\in N_{\eta,a}} \left(\frac{2kn}{p}\right) \ge 0 \quad (\text{bzw. } <0).$$

Aus $p>y^{1/2}$, $r^2|n$, $n\le y$ folgt $(r,p)=1$ und somit

$$\Sigma_a = \sum_{\substack{p\in P \\ p>y^{1/2}}} \Big| \sum_{n\in N_{\eta,a}} \Big(\frac{2^{a_n} k_n r_n^2}{p}\Big) \Big|$$

$$= \sum_{p\in P,\, p>y^{1/2}} \Big| \sum_{n\in N_{\eta,a}} \Big(\frac{2k_n}{p}\Big) \Big|$$

$$= \sum_{p\in P_a^+} \sum_{n\in N_{\eta,a}} \Big(\frac{2k_n}{p}\Big) - \sum_{p\in P_a^-} \sum_{n\in N_{\eta,a}} \Big(\frac{2k_n}{p}\Big)$$

$$= \sum_{n\in N_{\eta,a}} \sum_{p\in P_a^+} \Big(\frac{2k_n}{p}\Big) - \sum_{n\in N_{\eta,a}} \sum_{p\in P_a^-} \Big(\frac{2k_n}{p}\Big) ,$$

$$(10.6)\quad \Sigma_a \le \sum_{n\in N_{\eta,a}} \Big| \sum_{p\in P_a^+} \Big(\frac{2k_n}{p}\Big) \Big| + \sum_{n\in N_{\eta,a}} \Big| \sum_{p\in P_a^-} \Big(\frac{2k_n}{p}\Big) \Big|$$

$$= \Sigma_a^+ + \Sigma_a^- , \qquad \text{bzw.}$$

Wir berechnen Σ_a^+ ; Σ_a^- behandelt man ganz analog.

Für $n\in N_{\eta,a}$ ist $y^{1-\eta} < k_n \le \frac{y}{2^a}$ und daher

$$(10.7)\quad \Sigma_a^+ = \sum_{\substack{y^{1-\eta}<k\le \frac{y}{2^a} \\ 2\nmid k}} \mu^2(k) \sum_{\substack{r \\ r^2k2^a\in N_{\eta,a}}} \Big| \sum_{p\in P_a^+} \Big(\frac{2k}{p}\Big) \Big| .$$

Für $\mu^2(k)=1$ bezeichnen wir die Summe $\sum_{\substack{r \\ r^2k2^a\in N_{\eta,a}}} 1$

mit $\omega_a(k)$ und bekommen im Falle $k\le \frac{y}{2^a}$ die

einfachen Beziehungen

$$(10.8)\qquad \omega_a(k) \le \sum_{r\le(\frac{Y}{k2^a})^{1/2}} 1 \le y^{1/2}\, k^{-1/2}\, 2^{-a/2}$$

und

$$(10.9)\qquad \sum_{k\le\frac{Y}{2^a},\ 2\nmid k} \mu^2(k)\, \omega_a(k) \le \frac{Y}{2^a}\ .$$

Zweitens bemerken wir, daß für $2\nmid k$, $\mu^2(k)=1$ die Funktion

$$\chi_{8k}(n) = \begin{cases} (\frac{2k}{n}) & \text{für } (2k,n)=1\ , \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein primitiver Charakter mod $8k$ ist (s. Hasse [12], Seite 129). Aufgrund von (10.7) und der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung führt dies zu

$$\Sigma_a^+ = \sum_{y^{1-\eta}<k\le\frac{Y}{2^a},\ 2\nmid k} \mu^2(k)\, \omega_a(k) \Big| \sum_{p\in P_a^+} \chi_{8k}(p) \Big|$$

$$\le \Big\{ \sum_{y^{1-\eta}<k\le\frac{Y}{2^a}} \mu^2(k)\, \omega_a^2(k) \Big\}^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \Big\{ \sum_{k\le y,\ 2\nmid k} \mu^2(k) \Big| \sum_{p\in P_a^+} \chi_{8k}(p) \Big|^2 \Big\}^{1/2}\ ,$$

$$(10.10)\quad \Sigma_a^+ \le \max_{y^{1-\eta}<k\le \frac{y}{2^a}} \left\{ \mu^2(k)\, \omega_a^{1/2}(k) \right\} \left\{ \sum_{2^{1-\eta}<k\le \frac{y}{2^a}} \omega_a(k) \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{k\le 8x^{1/2}} \frac{k}{\phi(k)} \sum_{\chi \bmod k}^{*} \Big| \sum_{p\in P_a^+} \chi(p) \Big|^2 \right\}^{1/2}.$$

Die ersten beiden Faktoren in der letzten Zeile sind infolge (10.8) und (10.9)

$$\le (y^{1/2}\, y^{-\frac{1}{2}(1-\eta)}\, 2^{-a/2})^{\frac{1}{2}}\, (\tfrac{y}{2^a})^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}+\frac{\eta}{4}}\, 2^{-\frac{3}{4}a}.$$

Zur Berechnung des dritten Faktors ziehen wir Theorem 3.1 aus Halberstam-Richert [11] heran :

$$\sum_{k\le t} \frac{k}{\phi(k)} \sum_{\chi \bmod k}^{*} \Big| \sum_{A<n\le A+B} \chi(n)\beta_n \Big|^2 \le (B^{1/2}+t)^2 \sum_{A<n\le A+B} |\beta_n|^2$$

(β_n beliebige komplxe Zahlen).

Offenbar ist in unserem Fall

$$\beta_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n=p \in P_a^+, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Damit finden wir für den dritten Faktor die obere Schranke

$$((x^{1/2}+8x^{1/2})^2\, |P_a^+|)^{1/2} \le 9x^{1/2}\, |P|^{1/2}.$$

Wir fassen zusammen :

$$(10.11) \qquad \Sigma_a^+ \leq 9x^{\frac{1}{2}} |P|^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} + \frac{\eta}{4} 2^{-\frac{3}{4}a} .$$

Da wir für Σ_a^- die gleiche Abschätzung herleiten können, führen (10.4), (10.6) und (10.11) zu

$$\sum_{p\in P} \Big| \sum_{n\leq y} \left(\frac{n}{p}\right) \Big| \ll |P|^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}+\frac{\eta}{4}} \sum_{a\geq 0} 2^{-\frac{3}{4}a} + y^{1-\frac{\eta}{2}} |P| + y^{\frac{3}{2}}$$

$$\ll |P|^{\frac{1}{2}} \left\{ x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}+\frac{\eta}{4}} + |P|^{\frac{1}{2}} y^{1-\frac{\eta}{2}} \right\} + y^{\frac{3}{2}} .$$

Die zwei Terme in der geschweiften Klammer werden gleich, wenn wir $\eta = \frac{2}{3} \log(\frac{|P|y}{x}) \log^{-1} y$ setzen. Dank der Voraussetzung $|P| > \frac{x}{y}$ erfüllt das so gewählte η die Forderung $0<\eta<1$. Durch Einsetzen gelangt man zu

$$\sum_{p\in P} \Big| \sum_{n\leq y} \left(\frac{n}{p}\right) \Big| \ll |P|^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{3}{2}} \ll |P|^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} ,$$

da nach Voraussetzung

$$|P|^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} > \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} \geq y^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}} = y^2 > y^{3/2} .$$

<u>Lemma 10b:</u> Für $\lambda \geq 1$ bezeichne $A'(x,y,\lambda)$ die Anzahl der $p \leq x$ mit $\Big| \sum_{n\leq y} \left(\frac{n}{p}\right) \Big| > y\lambda^{-1}$.

Sei $0 \le \alpha \le \frac{1}{3}$, $y \le x^{1/2}$. Dann gilt

(10.12) $A'(x,y,y^{\alpha}) \ll x\, y^{3\alpha-1}$

und insbesondere für $\alpha = \frac{1}{4}(1 - \frac{\log_2 x}{\log y})$:

(10.13) $A'(x,y,y^{\alpha}) \ll \Pi(x)\, y^{-\alpha}$.

Beweis: In Lemma 10a sei P die Menge der in $A'(x,y,\lambda)$ gezählten Primzahlen. Offenbar brauchen wir den Beweis nur für den Fall

$$A'(x,y,y^{\alpha}) > x\, y^{3\alpha-1} \quad (\ge x\, y^{-1})$$

zu führen. Hier ist Lemma 10a anwendbar und wir erhalten

$$A'(x,y,y^{\alpha}) \le \sum_{p \in P} \Big| \sum_{n \le y} \left(\frac{n}{p}\right) \Big| \, y^{-(1-\alpha)}$$

$$\ll (A'(x,y,y^{\alpha}))^{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{1}{3}}\, y^{\frac{2}{3}-1+\alpha} ,$$

woraus die erste Behauptung sofort folgt.

(10.13) kann man durch Einsetzen leicht einsehen.

Bemerkung zu Lemma 10a: Auf ganz analoge Weise kann man Folgendes zeigen:

Sei $y \le x$, $A \le x^{1/2}$ und sei $B(x,I)$ die Anzahl der $p \le x$, für welche (n/p) im Intervall $I = (y,y+A]$ nicht das Vorzeichen wechselt. Dann gilt gleichmäßig in x,y,A: $B(x,I) \ll x\, A^{-1/4}$.

Oder:

$$B(x,I)\,\Pi^{-1}(x) \to 0, \qquad \text{wenn nur} \quad A\log^{-4}x \to \infty .$$

Die Methode ist jedoch nicht stark genug, eine nicht-triviale Aussage über die Anzahl der $p \le x$ zu machen, für die (n/p) in k e i n e m Intervall $(y,y+A]$ das Vorzeichen wechselt.

Erweitert man Lemma 10a in y über $x^{1/2}$ hinaus, so wird das Ergebnis schlechter. Um im Intervall $[x^{1/2},x^{2/3}]$ eine Abschätzung für $A'(x,y,\lambda)$ zu erzielen, die der in Lemma 10b nahekommt, geben wir noch eine zweite, einfache Methode an, die der in Lemma 6 ähnelt.

Lemma 10c: Für $x \ge x_0$, $x^{1/2} \le y \le x^{3/4}$ und natürliches r gilt

$$(10.14)\qquad \sum_{p\le x}\Big|\sum_{n\le y}\Big(\frac{n}{p}\Big)\Big|^{2r} \le \Big(y^{\frac{r}{2}}+x\Big)^2\, y^r\, y^{\frac{r}{\log_2 y^r}}.$$

Insbesondere für $\lambda = y^{1/5,4}$:

$$(10.15)\qquad A'(x,y,\lambda) \le \Pi(x)\,\lambda^{-1}.$$

Beweis: Wie im Beweis zu Lemma 6 errechnen wir für die Summe auf der linken Seite von (10.14) die obere Grenze

$$\Big(y^{r/2}+x\Big)^2 \sum_{n\le y^r} b_n^2 \qquad , \quad \text{wobei}$$

$b_n = \sum_{\substack{n=n_1 \dots n_r \\ n_i \le y,\ (i=1,..,r)}} 1$ ist.

Mit den Beziehungen $\sum_{n \le y^r} b_n \le y^r$ und

$$b_n \le \tau^r(n) \le n^{\frac{r}{\log_2 n}} \qquad (n \ge n_0)$$

gelangt man sofort zur Zeile (10.14).

(10.15) erhält man aus (10.14) in ähnlicher Weise wie (10.13) aus Lemma 10a, wenn man

$$r = \begin{cases} 4 & \text{für} \quad x^{1/2} \le y \le x^{16/27}, \\ 3 & \text{für} \quad x^{16/27} < y \le x^{3/4} \end{cases}$$

wählt.

Bemerkung zu Lemma 10c:
Die Zahlen b_n wurden hier in einfachster Weise berechnet. Ohne Beweis merken wir an, daß für $y \le x^{3/4}$,

$r = [\frac{2\log x}{\log y}]+1$ die Ungleichung

(10.16) $b_n \le (\Psi(y, 3\log x))^r$ erfüllt ist.

Mithilfe von Lemma 1 und einer entsprechenden unteren Abschätzung für $\Psi(x,y)$ (s. z.B. de Bruijn [5]) kann man sich überzeugen, daß

1. für $y \le \exp((\log x)^{1/2})$ diese Ungleichung bei der Abschätzung der Summe $\sum_{p \le x} | \sum_{n \le y} (\frac{n}{p}) |^{2r}$ nur zu trivialen Ergebnissen führt,

und

2. die durch (10.16) gegebene obere Schranke für b_n im wesentlichen bestmöglich ist.

5. Teil: Beweis des Satzes

Wir gliedern den Beweis in mehrere Lemmata auf. Zuerst behandeln wir den Fall großer k.

Lemma 11: Für $k_0 \leq k \leq \exp(\frac{1}{16} \frac{\log x \log_3 x}{\log_2 x})$ gilt

$$(11.1) \quad \sum_{p \leq x} n_k(p) = q_{2k}\, \Pi(x) \left\{1 + O(\frac{\log_2 k}{\log k})\right\}.$$

(q_i bezeichnet die i-te Primzahl).

Für jedes $A>0$ und $k_0 \leq k \leq (\log x)^A$ gilt

$$(11.2) \quad \sum_{p \leq x} r_k(p) = q_{2k}\, \Pi(x) \left\{1 + O(\frac{\log_2 k}{\log k})\right\}.$$

Die O-Konstante in (11.1) ist absolut, die in (11.2) hängt höchstens von A ab.

Beweis zu (11.1): Wir führen die Rechnung für

$$(11.3) \quad \log x < k \leq (\log x)^{30}$$

in Einzelheiten durch. In den restlichen k-Bereichen

sind nur geringfügige Änderungen vorzunehmen.

Aufgrund von Lemma 7 können wir schreiben

$$(11.4)\quad \sum_{p\le x} n_k(p) = \sum_q q \sum_{\substack{p\le x\\ n_k(p)=q}} 1$$

$$= \Bigg\{ \sum_{q\le(1-\varepsilon)q_{2k}} + \sum_{(1-\varepsilon)q_{2k}<q\le(1+\varepsilon)q_{2k}} +$$

$$+ \sum_{(1+\varepsilon)q_{2k}<q\le\log^{1/4}x\, q_{2k}} + \sum_{q_{2k}\log^{1/4}x<q\le\log^{31}x} +$$

$$+ \sum_{\log^{31}x<q\le x^{2/3}} \Bigg\} q \sum_{\substack{p\le x\\ n_k(p)=q}} 1$$

$$= \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5 \quad , \quad \text{bzw.}$$

($\varepsilon>0$ werden wir unten in Abhängigkeit von k wählen).

Den Hauptbeitrag liefert Σ_2 :
Mit $|\vartheta(q)|\le 1$ erhalten wir

$$(11.5)\quad \Sigma_2 = q_{2k} \sum_{(1-\varepsilon)q_{2k}<q\le(1+\varepsilon)q_{2k}} (1+\varepsilon\vartheta(q)) \sum_{\substack{p\le x\\ n_k(p)=q}} 1$$

$$= q_{2k}\,(1+O(\varepsilon)) \sum_{(1-\varepsilon)q_{2k}<q\le(1+\varepsilon)q_{2k}} \sum_{\substack{p\le x\\ n_k(p)=q}} 1 =$$

$$(11.5) \quad = q_{2k}\Big\{\Pi(x) - 1 - \sum_{\substack{p\le x \\ n_k(p)\le(1-\varepsilon)q_{2k}}} 1 - \sum_{\substack{p\le x \\ n_k(p)>(1+\varepsilon)q_{2k}}} 1\Big\} + O(\varepsilon\, q_{2k}\,\Pi(x))$$

Wir bezeichnen

$$(11.6) \quad \Sigma_6 = \sum_{\substack{p\le x \\ n_k(p)\le(1-\varepsilon)q_{2k}}} 1 \quad , \quad \Sigma_7 = \sum_{\substack{p\le x \\ n_k(p)>(1-\varepsilon)q_{2k}}} 1$$

und schätzen zum Beispiel Σ_6 ab.

Für jedes in Σ_6 gezählte p ist

$$(11.7) \quad \sum_{\substack{q\le(1-\varepsilon)q_{2k} \\ (q/p)=-1}} 1 \ge k \,.$$

Wenn wir nun mit genügend großem, aber fest wählbarem, $D_{13} > 0$

$$(11.8) \quad \varepsilon = \frac{D_{13}\log q_{2k}}{\log k}$$

setzen, folgt mit dem Primzahlsatz, den wir hier in der Gestalt $\Pi(t) = \frac{t}{\log t}(1+O(\frac{1}{\log t}))$ anwenden,

$$\Pi((1-\varepsilon)q_{2k}) \le (1+O(\frac{1}{\log k}))\,\frac{(1-\varepsilon)q_{2k}}{\log(q_{2k}(1-\varepsilon))} \quad =$$

$$= (1+O(\frac{1}{\log k}))(1-\varepsilon)\ \frac{2k\log(2k)\ (1+O(\log_2 k\ \log^{-1}k))}{\log(2k) + O(\log_2 k)}$$

$$= (1-\varepsilon)\ (1+O(\frac{\log_2 k}{\log k}))\ 2k \ \leq\ 2k\ (1-\frac{\varepsilon}{2})\ .$$

In $\overset{\cdot\cdot}{n}$ (11.7) schätzen wir hiermit weiter nach unten ab

$$\sum_{\substack{q\leq(1-\varepsilon)q_{2k}\\(q/p)=-1}} 1 \ \geq\ \frac{\Pi((1-\varepsilon)q_{2k})}{2(1-\varepsilon/2)} \ \geq\ \frac{1}{2}\Pi((1-\varepsilon)q_{2k})\ (1+\frac{\varepsilon}{4})\ ,$$

dies bedingt

$$\Big|\sum_{q\leq(1-\varepsilon)q_{2k}} (\frac{q}{p})\Big| \ \geq\ \frac{\varepsilon}{4}\,\Pi((1-\varepsilon)q_{2k})\ .$$

Mit der Bezeichnung aus Lemma 6 besagt das aber

$$\Sigma_6 \ \leq\ A(x,(1-\varepsilon)q_{2k},(\varepsilon/4)^{-1})\ ,$$

und in bekannter Weise schließen wir aus Lemma 5a

$$(11.9)\quad \Sigma_6 \ <<\ \Pi(x)\,\frac{4}{\varepsilon}\,(\frac{\log_2 x}{\log x})^{1/2} \ <<\ \Pi(x)\,\frac{(\log_2 x)^{3/2}}{\log_3 x\,\log^{1/2} x}$$

$$<<\ \Pi(x)\ (\log x)^{-\frac{1}{3}}\ .$$

Ganz analog finden wir eine obere Abschätzung für Σ_7 :

$$(11.10)\quad \Sigma_7 \ <<\ \Pi(x)\ (\log x)^{-\frac{1}{3}}\ .$$

Nun ergibt (11.5) bei Beachtung von (11.6), (11.8), (11.9) und (11.10)

$$(11.11)\quad \Sigma_2 = q_{2k}\left\{ \Pi(x) + O\left(\frac{\Pi(x)}{\log^{1/3}x}\right)\right\} + O\left(q_{2k}\,\Pi(x)\,\frac{\log_2 k}{\log k}\right)$$

$$= q_{2k}\,\Pi(x)\left\{ 1 + O\left(\frac{\log_2 k}{\log k}\right)\right\}.$$

Σ_1 und Σ_2 sind mithilfe von (11.9) und (11.10) leicht abzuschätzen :

$$(11.12)\quad \Sigma_1 \le q_{2k}\,\Sigma_6 \ll q_{2k}\,\Pi(x)\,(\log x)^{-\frac{1}{3}},$$

$$(11.13)\quad \Sigma_3 \le q_{2k}\,(\log x)^{1/4}\,\Sigma_7 \ll q_{2k}\log^{1/4}x\,\Pi(x)\log^{-\frac{1}{3}}x \ll q_{2k}\,\Pi(x)\,(\log x)^{-\frac{1}{12}}.$$

Für alle in Σ_4 gezählten p besteht die Ungleichung

$$(11.14)\quad \sum_{\substack{q\le q_{2k}\log^{1/4}x \\ (q/p)=-1}} 1 \le k.$$

Das Intervall $[2, q_{2k}(\log x)^{1/4}]$ können wir so in einander nicht überlappende Intervalle I_ν einteilen, daß in jedem I_ν gilt

$$(11.15)\qquad (\log x)^{\frac{1}{9}} \le \sum_{q\in I_\nu} 1 \le (\log x)^{\frac{1}{8}} .$$

Wegen $q_{2k}(\log x)^{1/4} \ge \Pi(q_{2k}(\log x)^{1/4}) \ge q_{2k}(\log x)^{1/5}$ haben wir

$$(11.16)\qquad q_{2k}(\log x)^{\frac{5}{40}} = q_{2k}(\log x)^{\frac{1}{5}-\frac{1}{8}} \le$$

$$\le \frac{\Pi(q_{2k}(\log x)^{1/4})}{\max_\nu \sum_{q\in I_\nu} 1} \le \sum_\nu 1 \le q_{2k}(\log x)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{9}}$$

$$= q_{2k}(\log x)^{\frac{5}{36}} .$$

Außerdem ist für $x\ge x_0$ und alle ν

$$(11.17)\qquad \prod_{q\in I_\nu} q \le \left\{ q_{2k}(\log x)^{\frac{1}{4}} \right\}(\log x)^{1/8}$$

$$\le (\log x)^{31}(\log x)^{1/8} \le x^{\frac{1}{2}} .$$

Wir behaupten nun : Zu jedem in Σ_4 gezählten p gibt es mindestens ein $\nu=\nu(p)$ mit

$$(11.18)\qquad \sum_{q\in I_\nu,\ (\frac{q}{p})=-1} 1 = 0 .$$

Gäbe es kein solches ν , so wäre

$$\sum_{\substack{q\le q_{2k}(\log x)^{1/4} \\ (\frac{q}{p})=-1}} 1 \;\ge\; \sum_{\nu} 1 \;\ge\; q_{2k}\,(\log x)^{5/40} \;>\; k\ ,$$

im Widerspruch zu (11.14) .

$\nu^*(p)$ sei das kleinste der in (11.18) aufgewiesenen ν . Für festes ν bekommen wir dann in üblicher Weise mit Lemma 4, dem Satz von Brun-Titchmarsh (der wegen (11.17) anwendbar ist) und (11.15)

$$\sum_{\substack{p\le x \\ \nu=\nu^*(p)}} 1 \;\ll\; \frac{\phi(4\prod_{q\in I_\nu} q)}{\left(\sum_{q\in I_\nu} 1\right)^2} \cdot \frac{x}{\log x\ \phi(4\prod_{q\in I_\nu} q)}$$

$$\ll\; \Pi(x)\; 2^{-(\log x)^{1/9}}$$

Schließlich erreichen wir für Σ_4 mit (11.16) die Abschätzung

$$(11.19)\qquad \Sigma_4 \;=\; \sum_{\nu} \sum_{\substack{p\le x \\ \nu=\nu^*(p)}} 1 \;\ll\; \Pi(x)\; 2^{-(\log x)^{1/9}} \sum_{\nu} 1$$

$$\le\; \Pi(x)\; 2^{-(\log x)^{1/9}}\; q_{2k}\,(\log x)^{5/36}$$

$$\ll\; \Pi(x)\; e^{-(\log x)^{1/10}}\ .$$

Zu Σ_5 : Aus $k\le(\log x)^{30}$ und $n_k(p)>(\log x)^{31}$ folgt

$$\Big| \sum_{q\le(\log x)^{31}} \left(\frac{q}{p}\right) \Big| > \frac{1}{2}\,\Pi(\log^{31}x) \ ,$$

und daraus, mittels Lemma 6,

$$(11.20)\quad \Sigma_5 \le x^{2/3}\, A(x,\log^{31}x,2)$$

$$\le 4x^{2/3} \exp\left\{\left(\frac{2\log x}{31\log_2 x}+1\right)\log(8\cdot 3\log x)\right\}$$

$$\le x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}} = x^{\frac{5}{6}} .$$

(11.4), (11.11), (11.12), (11.13), (11.19) und (11.20) liefern nun unmittelbar die Behauptung (11.1) für den Bereich (11.3) .

Wie schon zu Beginn bemerkt, bringen die übrigen k keine neuen Schwierigkeiten mit sich.

Für $k_0 \le k \le \log x$ schreiben wir statt Σ_3 bzw. Σ_4 :

$$\sum_{(1+\varepsilon)q_{2k}<q\le k^{1/4}q_{2k}} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{q_{2k}\, k^{1/4}<q\le\log^{31}x}$$

und verfahren damit wie oben.

Im Falle $k>(\log x)^{30}$ können wir $\Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5$ durch

$$\Sigma_3' = \sum_{(1+\varepsilon)q_{2k}<q\le x^{2/3}} q \sum_{\substack{p\le x\\ n_k(p)=q}} 1$$

ersetzen. Denn wir schließen wie oben mit $\varepsilon = \frac{B_{13}\log_2 k}{\log k}$

und der Bezeichnung aus Lemma 6

$$(11.21)\quad \Sigma_3' \le x^{2/3} \sum_{\substack{p\le x \\ n_k(p)>(1+\varepsilon)q_{2k}}} 1$$

$$\le x^{2/3}\, A(x,(1+\varepsilon)q_{2k},(\tfrac{\varepsilon}{4})^{-1}) .$$

Wegen $k \le \exp(\frac{1}{16}\log x \frac{\log_3 x}{\log_2 x})$ ist

$$30\log_2 x < \log((1+\varepsilon)q_{2k}) < \log x ,$$

$$(\tfrac{\varepsilon}{4})^{-2} = (\tfrac{D_{1,3}}{4}\frac{\log_2 k}{\log k})^{-2} \le \tfrac{1}{6}\log^2 x .$$

Zusammen mit (11.21) und Lemma 6 führt dies zu

$$\Sigma_3' \le 4\exp\left\{(\frac{2\log x}{30\log_2 x}+1)\log(2\frac{\log^2 x}{6})\right\} x^{2/3}$$

$$\le 4\exp\left\{\frac{1}{10}\frac{\log x}{\log_2 x}\,3\log_2 x\right\} x^{2/3}$$

$$= 4\, x^{\frac{3}{10}+\frac{2}{3}} = 4\, x^{\frac{29}{30}} .$$

Σ_1 und Σ_2 können in diesem Falle in gleicher Weise behandelt werden wie oben, außer daß hier Lemma 6 statt Lemma 5 anzuwenden ist.

Damit ist (11.1) vollständig bewiesen. Der Beweis zu (11.2) verläuft völlig analog mit Lemma 8 anstelle Lemma 7.

Lemma 12: Es gelten folgende asymptotischen Formeln :

$$(12.1) \qquad \sum_{p \le x} N_k(p) = 2k\,\Pi(x)\left\{1 + O((\log k)^{\frac{1}{3}} k^{-\frac{1}{3}})\right\}$$

für $k_0 < k \le (\log x)^A$ und $A > 0$,

$$(12.2) \qquad \sum_{p \le x} N_k(p) = 2k\,\Pi(x)\left\{1 + O(\frac{(\log x)^{1/4}}{k^{1/4}})\right\}$$

für $(\log x)^{30} < k \le x^{1/2}$,

$$(12.3) \qquad \sum_{p \le x} N_k(p) = 2k\,\Pi(x)\left\{1 + O(k^{-\frac{1}{5,4}})\right\}$$

für $x^{1/2} < k \le x^{3/4}$,

$$(12.4) \qquad \sum_{p \le x} N_k(p) = 2k\,\Pi(x)\left\{1 + O(x^{\frac{1}{2}} \log x\, k^{-1})\right\}$$

für alle k .

Die O-Konstante in (12.1) kann von A abhängen, alle übrigen O-Konstanten sind absolut.

Die gleichen Aussagen sind richtig für $R_k(p)$ statt $N_k(p)$.

Da der Beweis weitgehend dem zu Lemma 11 gleicht, geben wir nur einige Hinweise.

Zu (12.1):

$$\sum_{p\le x} N_k(p) = \Bigg\{ \sum_{n\le 2k(1-\varepsilon)} + \sum_{2k(1-\varepsilon)<n\le(1+\varepsilon)2k} + \sum_{2k(1+\varepsilon)<n\le 4k} + \sum_{4k<n\le k^{3/2}} + \sum_{k^{3/2}<n\le \max(k^{3/2},\log^{31}x)} + \sum_{\max(k^{3/2},\log^{31}x)<n\le x^{2/3}} \Bigg\} \sum_{\substack{p\le x \\ N_k(p)=n}} 1$$

$$= \Sigma_1 + \ldots + \Sigma_6 \text{ , bzw.}$$

Ähnlich wie im Beweis zu (11.1) sieht man ein:

$$\sum_{\substack{p\le x \\ N_k(p)<2k(1-\varepsilon)}} 1 \le A'(x,2k(1-\varepsilon),\tfrac{2}{\varepsilon}) .$$

Wir setzen $\varepsilon = \frac{\log^{1/3}k}{k^{1/3}}$, benutzen Lemma 9 und erhalten

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 = 2k\,\Pi(x)\left\{ 1+O(\frac{\log^{1/3}k}{k^{1/3}}) \right\} .$$

Für Σ_4 ergibt sich analog:

$$\Sigma_4 \le k^{3/2} A'(x,4k,\tfrac{4}{3}) << \Pi(x)\,\log k\, k^{1/2} .$$

Σ_5 und Σ_6 schätzen wir wie die entsprechenden Summen Σ_4 und Σ_5 im Beweis zu (11.1) ab. Denn aus $N_k(p)>k^{3/2}$ bzw. $N_k(p)>\log^{31}x$ folgt $n_k(p)>k^{3/2}$

bzw. $n_k(p) > \log^{31} x$.

Zu (12.2) und (12.3) geben wir nur die ε-Werte an:

(12.2) $\varepsilon = (\log x)^{\frac{1}{4}} k^{-\frac{1}{4}}$ (Beweis mit Lemma 10b),

(12.3) $\varepsilon = k^{-\frac{1}{5,4}}$ (Beweis mit Lemma 10c).

(12.4) ist eine unmittelbare Folgerung aus

$$\sum_{n \le x} \left(\frac{n}{p}\right) \ll p^{\frac{1}{2}} \log p .$$

Wir wenden uns abschließend dem Fall kleiner k zu.

Lemma 13: Sei A eine beliebig große, feste Zahl. Dann gilt gleichmäßig für alle $k \le A$

$$(13.1) \qquad \sum_{p \le x} n_k(p) = \left\{ \sum_{i=k}^{\infty} \binom{i-1}{k-1} 2^{-i} q_i \right\} \Pi(x) \, (1+o(1))$$

(q_i ist die i-te Primzahl) .

Ebenso

$$(13.2) \qquad \sum_{p \le x} r_k(p) = \left\{ \sum_{i=k}^{\infty} \binom{i-1}{k-1} 2^{-i} q_i \right\} \Pi(x) \, (1+o(1)).$$

Beweis zu (13.1): Wir schließen uns hier weitgehend dem Gedankengang von Erdös [10] an. (Dort wird - in unserer Schreibweise - nur der Fall $k=1$ behandelt).

O.B.d.A. können wir $A \geq A_0$ voraussetzen. Wir erhalten für $x \geq x_0(A)$ mit Lemma 7

$$(13.3) \quad \sum_{p \leq x} n_k(p) = \sum_q q \sum_{\substack{p \leq x \\ n_k(p)=q}} 1$$

$$= \sum_{q \leq x^{2/3}} q \sum_{\substack{\log^{10} x < p \leq x \\ n_k(p)=q}} 1 + O(\log^{10} x \, x^{2/3})$$

$$= \Bigg\{ \sum_{q_k \leq q \leq B} + \sum_{B < q \leq \frac{1}{2}\log x} + \sum_{\frac{1}{2}\log x < q \leq \log^{10} x} +$$

$$+ \sum_{\log^{10} x < q \leq x^{2/3}} \Bigg\} q \sum_{\substack{\log^{10} x < p \leq x \\ n_k(p)=q}} 1 + o(\Pi(x))$$

$$= \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + o(\Pi(x)) \text{ , bzw.}$$

B ist hierbei eine vorläufig fest gewählte Zahl $\geq A^2$, die wir am Schluß des Beweises mit x gegen ∞ gehen lassen.

Zu Σ_1: Für jedes p mit $(\log x)^{10} < p \leq x$ und $n_k(p) = q_l$ $(k \leq l \leq \Pi(B))$ gilt

$$(\tfrac{q_1}{p}) = a_1, \ldots, (\tfrac{q_{l-1}}{p}) = a_{l-1}, (\tfrac{q_l}{p}) = -1 ,$$

wobei $\{a_1, \ldots, a_{l-1}\}$ ein $(l-1)$-Tupel ist mit

$a_i = \pm 1$ $(i = 1, \ldots, l-1)$ und

$$\sum_{\substack{i \\ a_i = -1}} 1 = k-1 ,$$

d.h. eins von gewissen $\binom{l-1}{k-1}$ Tupeln $\{a_1,\dots,a_{l-1}\}$.
Mit Lemma 4 und dem Primzahlsatz für arithmetische Pro=
gressionen folgt weiter

$$\sum_{\log^{10}x<p\le x} 1 = \binom{l-1}{k-1} 2^{-l}\,\mathrm{Lix} +$$

$$+ O\Big(\sum_{\substack{i=1 \\ (4q_1\dots q_l,i)=1}}^{4q_1\dots q_l} \Big|\Pi(x;4q_1..q_l,i) - \frac{\mathrm{Lix}}{\phi(4q_1..q_l)}\Big| \Big)$$

$$+ o(\Pi(x))$$

$$= \binom{l-1}{k-1} 2^{-l}\,\Pi(x) + o(\Pi(x))$$

(mit von A und B abhängender o-Funktion),

und somit

$$(13.4)\qquad \Sigma_1 = \Big\{ \sum_{l=k}^{\Pi(B)} q_l \binom{l-1}{k-1} 2^{-l} \Big\}\,\Pi(x)\,(1+o(1)).$$

Wegen $B>A^2\ge A_0^2$ ist für $k\le A$

$$\sum_{l>\Pi(B)} q_l \binom{l-1}{k-1} 2^{-l} \le \sum_{l>\Pi(B)} l^{k+1}\, 2^{-l} \le 2^{-B^{1/2}},$$

also mit (13.4)

$$(13.5)\qquad \Sigma_1 = \Big\{ \sum_{l=k}^{\infty} q_l \binom{l-1}{k-1} 2^{-l} \Big\}\,\Pi(x)\,\Big\{ 1 + o(1) + O(2^{-B^{\frac{1}{2}}}) \Big\}$$

Bei Σ_2 gehen wir ganz analog vor, außer daß wir hier den Satz von Brun-Titchmarsh verwenden.

$$(13.6)\qquad \Sigma_2 \ll \Pi(x) \sum_{l>\Pi(B)} q_l \binom{l-1}{k-1} 2^{-l} \ll \Pi(x)\, 2^{-B^{1/2}}.$$

Zu Σ_3 :

$$(13.7)\quad \Sigma_3 \leq (\log x)^{10} \sum_{\substack{\log^{10} x < p \leq x^{2/3} \\ n_k(p) > \frac{1}{4}\log x}} 1.$$

Zu jedem in der letzten Summe gezählten p gibt es höchstens $k-1$ Primzahlen $q \leq \frac{1}{4}\log x$ mit $(\frac{q}{p}) = -1$. Mit den gleichen Überlegungen, die zur Berechnung von Σ_1 führten, und Lemma 4 bekommen wir für diese Summe die obere Abschätzung

$$\ll \Pi(x) \sum_{i=0}^{k-1} \binom{\Pi(1/4 \cdot \log x)}{i} 2^{-\Pi(1/4 \log x)}$$

$$\ll \Pi(x) (\log x)^{-11}$$

und folglich mit (13.7)

$$(13.8)\quad \Sigma_3 \ll \Pi(x) (\log x)^{-1} .$$

Σ_4 werten wir durch Lemma 6 aus, denn für jedes $p \leq x$ mit $n_k(p) > (\log x)^{10}$ gilt

$$\Big| \sum_{q \leq \log^{10} x} (\tfrac{q}{p}) \Big| > \tfrac{1}{2} \Pi((\log x)^{10})$$

und daher

$$\Sigma_4 \leq x^{2/3} A(x, \log^{10} x, 2)$$

$$\leq x^{2/3} \, 4 \exp\Big\{ \Big(\frac{2 \log x}{10 \log_2 x} + 1 \Big) \log(8(2 \log x + 10 \log_2 x)) \Big\}$$

$$\leq x^{11/12}.$$

Wir fassen zusammen:

$$\sum_{p\le x} n_k(p) = \left\{ \sum_{l=k}^{\infty} q_l \binom{l-1}{k-1} 2^{-l} \right\} \Pi(x) \left\{ 1+o(1)+O(2^{-B^{1/2}}) \right.$$
$$\left. +O(\log^{-1}x) \right\},$$

wobei $B>A^2\ge A_0^2$ ist, die o-Funktion von A und B abhängen kann und die O-Konstante absolut ist.

Ist nun $\varepsilon>0$ vorgegeben, dann wählen wir zuerst B so groß, daß das zweite Fehlerglied absolut genommen $< \frac{\varepsilon}{3}$ wird. Sodann wählen wir x genügend groß und der gesamte Fehler bleibt unterhalb von ε. Damit ist (13.1) gezeigt.

(13.2) beweist man ebenso.

Bemerkenswert ist, daß in (13.1) und (13.2) die gleiche Konstante $\Sigma\binom{i-1}{k-1}2^{-i}q_i$ steht.

Bemerkungen: 1. Ersetzen wir im Beweis zu (13.1) A durch $(\log_2 x)^{1/2}$ und B durch $\log_2 x$ und benutzen wir in Σ_1 den Siegelschen Primzahlsatz, so erhalten wir gleichmäßig für alle $k\le A$

$$\sum_{p\le x} n_k(p) = \left(\sum_{i=k}^{\infty} \binom{i-1}{k-1} 2^{-i} q_i \right) \Pi(x) \left(1+O\left((\log x)^{-\frac{C}{\log_3 x}}\right)\right),$$

(desgleichen für $r_k(p)$).

2. Mithilfe des Primzahlsatzes kann man zeigen:

$$(13.9) \qquad \sum_{i=k}^{\infty} \binom{i-1}{k-1} 2^{-i} q_i \to q_{2k} \quad \text{für } k\to\infty .$$

Wir wollen den Beweis nicht ausführen, da (13.9) aus (11.1) und (13.1) unmittelbar entnommen werden kann.

Lemma 14 behandelt schließlich die zu Lemma 13 analogen Aussagen über $N_k(p)$ und $R_k(p)$.

Lemma 14: Gleichmäßig für alle $k \leq A$ gilt

$$(14.1) \qquad \sum_{p \leq x} N_k(p) = \mathfrak{A}_k \Pi(x) (1+o(1)) ,$$

$$(14.2) \qquad \sum_{p \leq x} R_k(p) = \mathfrak{B}_k \Pi(x) (1+o(1)).$$

$\mathfrak{A}_k$ und $\mathfrak{B}_k$ sind eventuell verschiedene, positive, von k abhängige Konstanten.

Beweis: Da wir uns weitgehend an den Beweis zu (13.1) anlehnen, fassen wir uns hier kürzer. Mit

$B \geq A^2 \geq A_0$ schreiben wir wie oben

$$(14.3) \qquad \sum_{p \leq x} N_k(p) = \left\{ \sum_{n \leq B} + \sum_{B < n \leq \frac{\log x}{2}} + \sum_{\frac{\log x}{2} < n \leq \log^{10} x} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\log^{10} x < n \leq x^{2/3}} \right\} n \sum_{\substack{\log^{10} x < p \leq x \\ N_k(p) = n}} 1$$

$$+ o(\Pi(x))$$

$$= \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + o(\Pi(x)) , \quad \text{bzw.}$$

Zu Σ_1 bemerken wir:

Für $k \le n \le B$, $1 \le i \le k$ bezeichne $w_{i,n}$ die Anzahl aller $\Pi(n)$-Tupel $\{a_1,\dots,a_{\Pi(n)}\}$ mit

a) $a_j = \pm 1 \quad (j=1,\dots,\Pi(n))$,

b) $\sum_{a_j=-1} 1 = i$,

und, wenn durch $f(q_1)=a_1,\dots,f(q_{\Pi(n)})=a_{\Pi(n)}$ für $m \le n$ eine vollständig multiplikative, zahlentheoretische Funktion gebildet wird,

c) $f(n)=-1, \quad \sum_{\substack{m\le n \\ f(n)=-1}} 1 = k$.

Wie im Beweis zu Lemma 13 erhalten wir

$$\Sigma_1 = \left\{ \sum_{k\le n\le B} n\, 2^{-\Pi(n)} \sum_{i=1}^{k} w_{i,n} \right\} \Pi(x)\,(1+o(1)).$$

Wegen $w_{i,n} \le \binom{\Pi(n)}{i}$ ist

$$\sum_{B<n} n\, 2^{-\Pi(n)} \sum_{i=1}^{k} w_{i,n} \le \sum_{B<n} n^{A+2}\, 2^{-n/2} \le 2^{-B^{1/2}},$$

und daher

$$(14.4) \quad \Sigma_1 = \left\{ \sum_{n\ge k} n\, 2^{-\Pi(n)} \sum_{i=1}^{k} w_{i,n} \right\} \Pi(x) \left\{ 1+o(1)+O(2^{-B^{1/2}}) \right\}.$$

Σ_2 schätzen wir wie oben ab. Σ_3 und Σ_4 ebenso, denn z.B. aus $N_k(p)>\log^{10}x$ folgt $n_k(p)>\log^{10}x$.

(14.2) bringt ebenfalls keine neuen Schwierigkeiten mit sich. Aus der Definition der $w_{i,n}$ ersieht man allerdings, daß $\mathfrak{N}_k$ und $\mathfrak{R}_k$ verschieden sein können. Daß $\mathfrak{N}_k$ und $\mathfrak{R}_k$ positiv sind, ist unmittelbar klar.

Man kann leicht nachprüfen, daß der in der Einleitung genannte Satz in den Lemmata dieses Teiles enthalten ist.

Schlußbemerkungen:

Zu dem hier bewiesenen Satz lassen sich vermutlich noch Ergänzungen und Verallgemeinerungen angeben.

Erstens wäre es wünschenswert, in (2) und (3) die k-Bereiche auszudehnen. Dazu sind Verschärfungen von Lemma 7 und 8 nötig. Wie in der Bemerkung zu Lemma 8 angedeutet, können solche Aussagen sehr tief liegen.

Zweitens ist anzunehmen, daß die hier für quadratische Reste und Nicht-Reste bewiesenen Resultate sich auf den Fall höherer Potenzreste übertragen lassen. Bekanntlich ist der in der Einleitung zitierte Satz von Erdös durch Elliott (Acta Arith. 13 (1967),131-150 und 15 (1968),153-162) auf Nicht-Reste und Reste höherer Ordnung verallgemeinert worden.

Drittens kann man das Verhalten des Legendre-Symbols in allgemeineren Folgen betrachten, etwa in Progressionen oder in der Folge der Funktionswerte eines Polynoms höheren als ersten Grades.

Alle drei genannten Fragen erfordern über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehende Hilfsmittel und Methoden.

Literaturverzeichnis

[1] M.B.Barban, The "Large Sieve" method and its applications in the theory of numbers, Uspekhi Mat. Nauk 21 (1966), 51-102 = Russ. Math. Surveys 21 (1966), 49-104.

[2] W.E.Briggs, S.Chowla, On the number of positive integers all of whose prime factors are $\leq y$, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), 558-562.

[3] N.G. de Bruijn, On the number of uncancelled elements in the sieve of Eratosthenes, Indag. Math. 12 (1950), 247-256.

[4] - " - , On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$, Indag. Math. 13 (1951), 50-59.

[5] - " - , On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$, Indag. Math. 28 (1966), 239-247.

[6] A.A.Buchstab, On an asymptotic estimate of the number of numbers of an arithmetic progression which are not divisible by "relatively" small prime numbers, Mat. Sbornik N.S. 28(70), 165-184 (1951).

[7] D.A.Burgess, The distribution of quadratic residues and non-residues, Mathematika 4 (1957), 106-112.

[8] D.A.Burgess, P.D.T.A.Elliott, The average of the least primitive root, Mathematika 15 (1968), 39-50.

[9] P.D.T.A.Elliott, A note on a recent paper of U.V.Linnik and A.I.Vinogradov, Acta Arith. 13 (1967-1968), 103-105.

[10] P.Erdös, Remarks on number theory I, Mat. Lapok, 12 (1961), 10-17.

[11] H.Halberstam, H.-E.Richert, The large sieve, (Seminarmanuskript) Marburg, 1968.

[12] H.Hasse, Vorlesungen über Zahlentheorie, Berlin, 1950.

[13] H.Heilbronn, On the averages of some arithmetical functions of two variables, Mathematika 5 (1958), 1-7.

[14] J.Kubilius, Probabilistic methods in the theory of numbers, Providence, 1964.

[15] Yu.V.Linnik, "The large sieve", C.R.(Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) 30 (1941), 292-294.

[16] - „ - , A remark on the least quadratic non-residue, C.R.(Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) 36 (1942), 119-120.

[17] - „ - , On the characters of primes I, Mat. Sbornik, 58(16) 1945, 101-120.

[18] Yu.V.Linnik, A.I.Vinogradov, Hyperelliptic curves and the least prime quadratic residue, Doklady Akad. Nauk SSSR 168 (1966) = Soviet Math. 7(1966), 612-614.

[19] G.Pólya, Über die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste, Göttinger Nachrichten 1918, 21-29.

[20] K.Prachar, Primzahlverteilung, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1957.

[21] R.A.Rankin, The difference between consecutive prime numbers, J. London Math. Soc. 13 (1938), 242-247.

[22] I.M.Vinogradov, New approach to the estimation of 2 sum values $\chi(p+k)$, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 16 (1952), 197-210.

[23] - " - , Improvement of an estimate for the sum of the values $\chi(p+k)$, Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 17 (1953), 285-290.

Lebenslauf

Am 15.9.1942 wurde ich in Dittersbach (Kreis Waldenburg, Schlesien) als Sohn des Berufssoldaten Helmut Wolke und seiner Ehefrau Erna, geb. Krasel, geboren.

Von 1948 bis 1954 besuchte ich die Volksschule in Wingst-Weißenmoor (Niederelbe), von 1954 bis 1961 die Niedersächsische Heimschule in Bederkesa, Kreis Wesermünde.

Vom Sommersemester 1961 bis zum Wintersemester 1966/67 studierte ich an der Philipps-Universität Marburg/Lahn Mathematik und Physik. Am 25.2.1965 legte ich die Diplom-Vorprüfung, am 10.5.1967 die Diplom-Hauptprüfung im Fach Mathematik ab.

Meine akademischen Lehrer, denen ich in besonderem Maße verpflichtet bin, sind die Herren Professoren Huckemann, Großmann, Ludwig, Peyerimhoff, Richert, H.A. Schmidt und Walcher. Herrn Prof. Richert danke ich für vielseitige Unterstützung während des Studiums und bei der Abfassung dieser Arbeit.